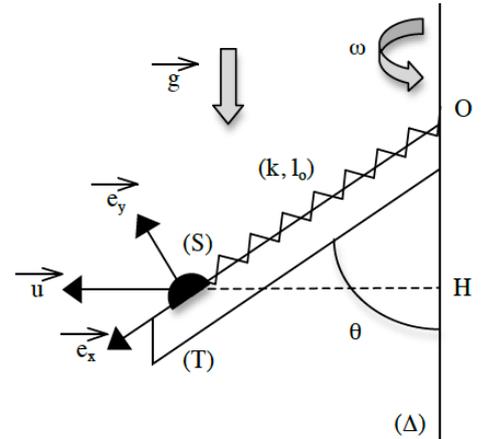


## BASES DE LA DYNAMIQUE

I Un système est constitué d'une glissière (T) soudée sur un bâti mobile autour d'un axe vertical ( $\Delta$ ). Sur la glissière inclinée d'un angle  $\theta$  fixe par rapport à la verticale est posé (liaison unilatérale) un solide (S) de masse  $m$  qui peut glisser sans frottement sur (T). Ce solide, que l'on peut considérer comme ponctuel, est accroché à un ressort à spires non jointives, de raideur  $k$ , de longueur à vide  $l_0$ , dont l'autre extrémité est fixée au bâti.



1) Le système étant tout d'abord immobile, déterminer la longueur  $l_e$  du ressort à l'équilibre en fonction de  $m$ ,  $g$ ,  $k$ ,  $\theta$  et  $l_0$ .

2) Le système est mis en rotation autour de l'axe vertical ( $\Delta$ ) avec une vitesse angulaire constante  $\omega$  suffisamment faible pour que (S) reste au contact de (T).

a) Donner précisément la nature du mouvement de (S) (trajectoire en indiquant ses caractéristiques, et façon dont elle est décrite).

b) En déduire l'expression de l'accélération  $\vec{a}$  du solide (S) dans le repère fixe du laboratoire quand le ressort a atteint sa nouvelle longueur d'équilibre  $l'_e$ . On l'exprimera en fonction de  $l'_e$ ,  $\theta$ ,  $\omega$  et  $\vec{u}$  (unitaire de la direction HS, H étant le projeté orthogonal de (S) sur ( $\Delta$ )).

c) Donner les composantes  $a_x$  et  $a_y$  de  $\vec{a}$  dans la base  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ .

d) Exprimer  $l'_e$  en fonction de  $k$ ,  $l_0$ ,  $m$ ,  $g$ ,  $\theta$  et  $\omega$ .

e) Calculer les composantes  $R_x$  et  $R_y$  de la réaction  $\vec{R}$  du bâti sur (S) dans la base  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ .

3) La vitesse de rotation du solide est maintenant  $\omega_0$ . Elle est telle que le solide décolle juste de la glissière quand le ressort a atteint sa nouvelle longueur d'équilibre  $l'_e$ . Calculer  $\omega_0^2$  en fonction de  $k$ ,  $g$ ,  $m$ ,  $l_0$  et  $\theta$ .

Réponse :  $l_e = \frac{mg}{k} \cos\theta + l_0$  ;  $\vec{a} = -l'_e \omega^2 \sin\theta (\sin\theta \vec{e}_x + \cos\theta \vec{e}_y)$  ;  $l'_e = \frac{kl_0 + mg \cos\theta}{k - m\omega^2 \sin^2\theta}$  ;  
 $\vec{R} = (mg \sin\theta - ml'_e \omega^2 \sin\theta \cos\theta) \vec{e}_y$  ;  $\omega_0^2 = \frac{kg}{mg + kl_0 \cos\theta}$

### II Chaussette dans un sèche-linge

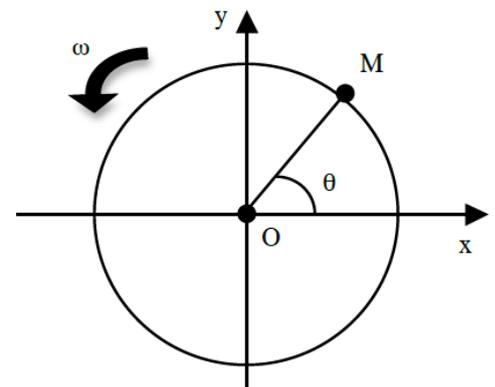
Dans le tambour d'un sèche-linge, on observe que le mouvement d'une chaussette s'effectue en une alternance de deux phases :

\* dans une première phase, elle est entraînée par le tambour dans un mouvement de rotation uniforme ;

\* dans une deuxième phase, elle retombe en chute libre.

L'observation montre qu'à chaque tour, elle décolle du tambour au même endroit. On cherche à déterminer ce point.

On modélise le tambour par un cylindre de rayon  $R = 25$  cm tournant à 50 tours par minute. On s'intéresse au mouvement de la chaussette que l'on assimile à un point matériel M de masse  $m$ . On étudie la première phase pendant laquelle le linge est entraîné dans un mouvement de rotation circulaire et uniforme à la même vitesse angulaire que le tambour et en restant collé aux parois du tambour.



Pour les applications numériques, on considère  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ .

1) Déterminer l'accélération de la chaussette.

2) En déduire la réaction du tambour sur la chaussette.

3) Montrer que la réaction normale s'annule lorsque la chaussette atteint un point dont on déterminera la position angulaire.

4) Que se passe-t-il en ce point ? Quel est le mouvement ultérieur ?

Réponse :  $\vec{a} = -R\omega^2 \vec{e}_r$  ;  $R_r = m(g \sin\theta - R\omega^2)$  et  $R_\theta = mg \cos\theta$  ;  $44^\circ$ .

### III Quand te reverrai-je ? Pays merveilleux, où ceux qui s'aiment vivent à deux ...

On étudie le mouvement d'un skieur assimilé à un point matériel M de masse  $m$  descendant une piste selon la ligne de plus grande pente, faisant l'angle  $\alpha$  avec l'horizontale. L'air exerce une force de frottement supposée de la forme  $\vec{F} = -\lambda \vec{v}$ , où  $\lambda$  est un coefficient

constant positif et  $\vec{v}$  la vitesse du skieur.

On note  $\vec{T}$  et  $\vec{N}$  les composantes tangentielle et normale de la réaction exercée par la neige (le terme T constitue un terme de frottement). Les modules de ces termes de force sont reliés par la loi de Coulomb :  $T = f.N$ , où  $f$  est le coefficient de frottement solide.

On choisit pour axe Ox dirigé vers le bas la ligne de plus grande pente à partir de la position initiale du skieur.

Le skieur est supposé partir de l'origine O à l'instant initial  $t = 0$  avec une vitesse négligeable.

On note Oy la normale à la piste dirigée vers le haut.

- 1) Faire un schéma complet en représentant les différents axes et vecteurs.
- 2) Exprimer T et N en fonction de m, g, f et  $\alpha$ .

Application numérique :  $m = 80 \text{ kg}$  ;  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$  ;  $f = 0,05$  et  $\alpha = 30^\circ$ .

- 3) Établir une équation différentielle du premier ordre portant sur  $v(t)$ .

Déterminer l'expression de la vitesse  $v(t)$  du skieur à chaque instant.

- 4) a) Montrer que le skieur atteint une vitesse limite  $\vec{v}_l$  et calculer  $\vec{v}$  en fonction  $\vec{v}_l$ .

b) *Application numérique* : calculer  $v_l$  avec  $\lambda = 12 \text{ USI}$ , les autres valeurs étant inchangées.

- 5) Calculer littéralement et numériquement la date  $t_1$  où le skieur a une vitesse égale à  $v_l/2$ .

6) A la date  $t_1$ , le skieur tombe. On néglige alors la résistance de l'air, et on considère que le coefficient de frottement sur le sol est alors  $f' = 1,1$ . Calculer la durée nécessaire et la distance parcourue avant que le skieur ne soit à l'arrêt.

Réponse :  $N = 68.10^1 \text{ N}$  et  $T = 34 \text{ N}$  ;  $v = 30 \text{ m.s}^{-1}$  ;  $t_1 = 4,6 \text{ s}$  ;  $3,4 \text{ s}$  et  $25 \text{ m}$ .

#### IV Atterrissage en catastrophe d'un avion

Un avion de chasse de masse  $m = 9,0 \text{ t}$  en panne de freins atterrit à une vitesse  $v_a = 241 \text{ km.h}^{-1}$ . Une fois au sol, il est freiné en secours par un parachute de diamètre  $D = 3,0 \text{ m}$  déployé instantanément par le pilote au moment où les roues de l'avion touchent le sol. On néglige les forces de frottement des roues sur le sol par rapport à la force de traînée (frottement fluide) du parachute qui s'écrit  $T = \frac{1}{2} C_x \rho S v^2$  avec  $v$  la vitesse de l'avion,  $S$  la surface projetée du parachute sur un plan perpendiculaire à la vitesse,  $C_x = 1,5$  le coefficient

de traînée supposé constant, et  $\rho = 1,2 \text{ kg.m}^{-3}$  la masse volumique de l'air.

On considère que le réacteur ne délivre plus aucune poussée.

- 1) Établir l'équation différentielle à laquelle obéit la vitesse  $v$  de l'avion.
- 2) En déduire l'expression de la vitesse  $v$  en fonction de la date  $t$ . On prendra comme origine des temps la date à laquelle les roues de l'avion touchent le sol.
- 3) Montrer que la force de traînée n'est pas suffisante pour stopper complètement l'avion.
- 4) Dans le cas où les freins fonctionnent, la distance d'atterrissage de l'avion est de l'ordre de  $d = 1,4 \text{ km}$ . Déterminer la vitesse atteinte par l'avion après avoir été freiné uniquement par le parachute sur cette distance. Application numérique.

Réponse :  $v = \frac{v_a}{1 + v_a k t}$  avec  $k = \frac{1}{2m} C_x \rho S$  ;  $90 \text{ km.h}^{-1}$ .

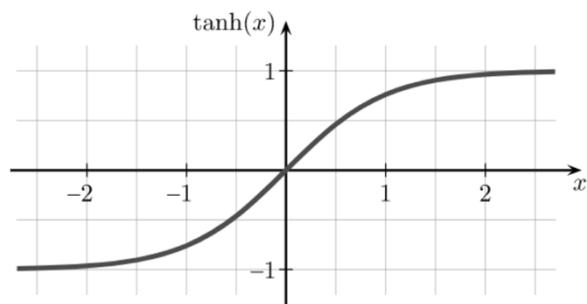
#### V Tir d'un boulet de canon

Formulaire :

Fonction	$\arctan(x)$	$\operatorname{arctanh}(x)$
Fonction dérivée	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{1-x^2}$
Fonction réciproque	$\tan(x)$	$\tanh(x)$

On rappelle que :  $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Tracé de la fonction  $\tanh(x)$  :



Données :

Constante de la gravitation universelle :  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$

Rayon de la Terre :  $R_T = 6,37 \cdot 10^3 \text{ km}$

On se place dans le référentiel terrestre, supposé galiléen.

Au 18ème siècle, on étudie s'il est possible de faire quitter la Terre à un objet en le tirant verticalement. On pratique en particulier des tirs de boulets de canon. On utilise un boulet en fonte, dit de " 24 livres", de masse  $m = 12 \text{ kg}$  et de diamètre  $D = 15 \text{ cm}$  (figure 1). La vitesse initiale communiquée par le canon au boulet peut atteindre  $v_0 = 650 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . On suppose que l'accélération de la pesanteur est uniforme, égale à  $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .



Figure 1 : canon et boulet de 24 livres

On étudie le mouvement du boulet tiré depuis la surface terrestre. Le boulet est assimilable à un point matériel de masse  $m$  dont on néglige la rotation propre. On note  $z$  l'altitude sur la verticale ascendante (figure 2), ainsi :  $\vec{OM} = z\vec{u}_z$ ,  $\vec{v} = \dot{z}\vec{u}_z$  et  $\vec{a} = \ddot{z}\vec{u}_z$ .

On note également si besoin :  $v = \|\vec{v}\|$ .



Figure 2 : repère lié au sol terrestre

Les frottements de l'air ne sont pas négligeables dans cette étude. On montre que pour des vitesses supérieures à  $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , la force de frottement subie par le boulet suit une loi quadratique de la forme  $\vec{F}_f = -\gamma v \vec{v}$ . La constante  $\gamma$ , étudiée en mécanique des fluides, dépend de la masse volumique de l'air et de la taille du boulet.

L'étude numérique du problème conduit aux résultats illustrés sur les courbes des figures 3 à 5.

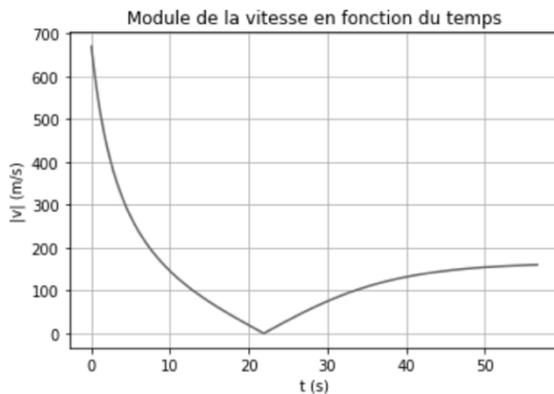


Figure 3 : module de la vitesse  $v(t)$

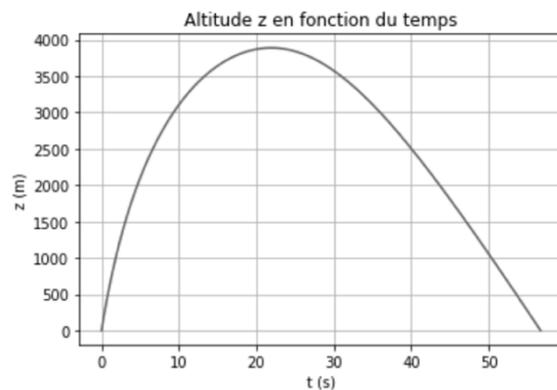


Figure 4 : altitude  $z(t)$

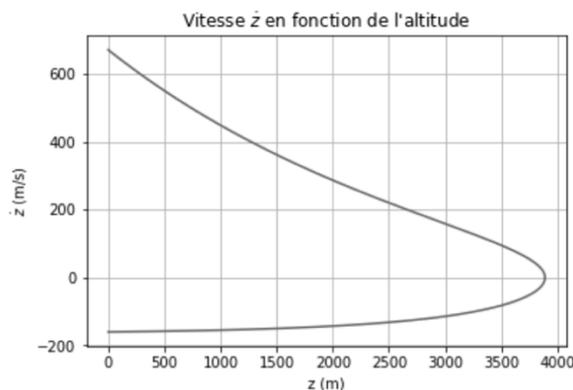


Figure 5 : vitesse  $\dot{z}(z)$

1) On écrit  $\vec{F}_f$  sous la forme  $\vec{F}_f = -\frac{m}{l_f} v \vec{v}$  avec  $m$  la masse du boulet. Quelle est la dimension du paramètre  $l_f$  qui apparaît alors dans la force de frottement ainsi formulée ?

2) Justifier par un argument physique que le boulet atteint une hauteur maximale  $h_{max}$  puis retombe, comme les courbes en témoignent.

Afin de faciliter l'étude, on distingue la phase ascendante de la phase descendante.

Ainsi  $\vec{v} = +v\vec{u}_z$  pour la phase ascendante et  $\vec{v} = -v\vec{u}_z$  pour la phase descendante.

3) Écrire pour chacune des deux phases, la phase ascendante puis la phase descendante, les équations différentielles vérifiées par le module  $v$  de la vitesse du boulet.

Les questions suivantes (4, 5 et 6) doivent être résolues sans chercher l'expression mathématiques de  $v(t) = \|\vec{v}(t)\|$ , simplement en interprétant la forme des équations différentielles obtenues question 3 et en observant les courbes des figures 3 à 5.

4) Montrer que lors de la phase descendante la vitesse tend vers une vitesse limite asymptotique  $v_{lim}$ . Est-ce le cas pour la phase ascendante ? Justifier.

5) Exprimer  $v_{lim}$  en fonction des données du problème.

6) Pour la phase descendante, mettre en évidence un régime transitoire et un régime permanent. Montrer que l'on peut attribuer à cette phase une durée caractéristique  $\tau = \sqrt{\frac{l_f}{g}}$ . Quelle est la nature du mouvement lors du régime permanent descendant ? Préciser ses caractéristiques.

7) Reproduire les figures 3 à 5 sur la copie et identifier clairement les différentes phases et régimes du mouvement.

On note  $v_+(t)$  l'expression mathématique de la vitesse en fonction du temps lors de la phase ascendante et  $v_-(t)$  l'expression mathématique de la vitesse en fonction du temps lors de la phase descendante.

8) À l'aide du formulaire fourni, résoudre les équations différentielles obtenues à la question 3 et exprimer  $v_+(t)$  et  $v_-(t)$ . On pourra introduire pour ce calcul les variables réduites :  $\tilde{v} = \frac{v}{v_{lim}}$  et  $\tilde{t} = \frac{t}{\tau}$ . On exprimera les vitesses en fonction de  $v_{lim}$ ,  $\tau$ ,  $v_0$  (vitesse initiale),  $t_1$  (temps de passage à l'altitude maximale) et  $t$ .

9) Recouper les résultats des trois questions 4, 5 et 6 avec les solutions des équations différentielles obtenues à la question 8. On rappelle que  $e^\varepsilon \approx 1 + \varepsilon$  pour  $|\varepsilon| \ll 1$ .

10) Évaluer numériquement  $v_{lim}$ ,  $\tau$  et  $l_f$  (on s'appuiera sur les représentations graphiques et les résultats des calculs).

11) Discuter les hypothèses du modèle utilisé, en particulier l'uniformité de l'accélération de la pesanteur, ainsi que la forme quadratique de la force de frottement.

On rappelle que l'accélération de la pesanteur au voisinage de la Terre est donnée par la relation suivante :  $g = \frac{GM_T}{(R_T+h)^2}$

où  $G$  est la constante de la gravitation universelle,  $M_T$  est la masse de la Terre,  $R_T$  son rayon, et  $h$  l'altitude.

Réponse :  $\frac{dv}{dt} = -g - \frac{1}{l_f} v^2$  pour la montée et  $\frac{dv}{dt} = +g - \frac{1}{l_f} v^2$  pour la descente ;  $v_{lim} = \sqrt{gl_f}$  ;

$v_+(t) = v_{lim} \tan \left[ -\frac{t}{\tau} + \arctan \left( \frac{v_0}{v_{lim}} \right) \right]$  ;  $v_-(t) = v_{lim} \tanh \left( \frac{t-t_1}{\tau} \right)$  ;  $v_{lim} = 160 \text{ m.s}^{-1}$  ;  $\tau = 15 \text{ s}$  ;  $l_f = 2,5 \text{ km}$ .

## VI Fonctions spéciales

*Bon nombre de problèmes rencontrés en physique peuvent être résolus à l'aide de « fonctions spéciales ». Ces fonctions définies mathématiquement sont implémentées dans de nombreuses bibliothèques informatiques (comme scipy pour python) et peuvent être utilisées aussi simplement qu'une fonction sinus ou racine carrée qui sont elles aussi d'une certaine manière des fonctions spéciales et tout aussi analytiques ...*

*On rencontre bien souvent des résolutions numériques de problèmes physiques alors que l'utilisation de ces fonctions spéciales permet une résolution complète et analytique. Ce problème se propose d'illustrer l'intérêt de ces « fonctions spéciales ».*

## Partie A : La fonction de W de Lambert

## Tir d'un projectile sans frottements

Un projectile assimilé à un point matériel de masse  $m$  est lancé à partir du sol en  $O$  avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0 \in (O, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  et faisant un angle  $\theta_0$  avec l'horizontale dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

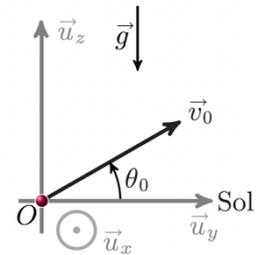


Figure 1 – Tir d'un projectile

- 1) Rappeler la définition d'un référentiel galiléen. Dans quelle mesure le référentiel terrestre peut-il être supposé galiléen ?
- 2) Établir les équations horaires du mouvement. Montrer que le mouvement est plan.
- 3) Établir l'équation de la trajectoire. Quelle est la forme de la trajectoire ? Est-elle symétrique ?
- 4) Déterminer les coordonnées du sommet S de la trajectoire.  
Définir la portée L du tir et établir son expression. Quel est l'angle  $\theta_0$  assurant un tir de portée maximale ?

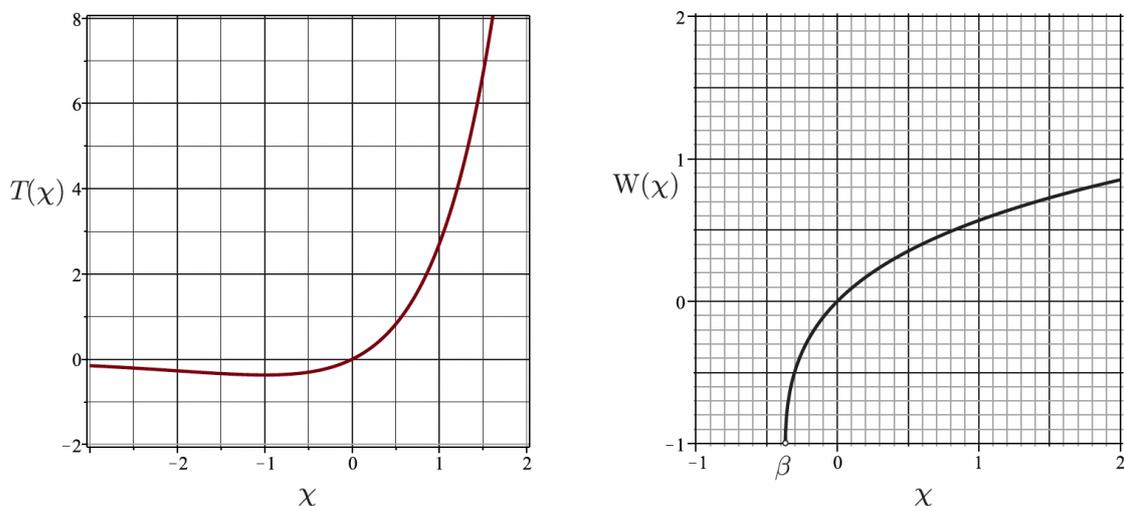
## Tir d'un projectile avec frottements

On considère maintenant que le projectile est soumis à une force de frottements proportionnelle à la vitesse :  $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$  avec  $\alpha > 0$ .

- 5) Quelle est la dimension du coefficient  $\alpha$  ? Définir à partir de  $\alpha$  un temps caractéristique  $\tau$ . Le mouvement reste-t-il plan ?
- 6) Établir, en fonction  $g, \tau, v_0 = \|\vec{v}_0\|, \theta_0$  et  $t$ , les nouvelles équations horaires du mouvement.
- 7) Dans la situation où  $t \ll \tau$ , simplifier les équations horaires de la trajectoire et donner l'allure du mouvement.  
On rappelle que  $e^\varepsilon \approx 1 + \varepsilon$  pour  $|\varepsilon| \ll 1$ .
- 8) Dans la situation où  $t \gg \tau$ , simplifier les équations horaires du mouvement en faisant apparaître une vitesse limite  $v_1$ .  
Où retombe le projectile ?
- 9) Dédire des résultats précédents, l'allure globale de la trajectoire dans une situation où le temps de vol est grand devant  $\tau$ , en séparant la trajectoire en trois phases.
- 10) Tracer l'allure de la trajectoire pour un temps de vol de l'ordre de  $\tau$ .

## La portée maximale d'un tir avec frottement

11) Dresser le tableau de variation de la fonction  $T: \chi \rightarrow T(\chi) = \chi e^\chi$  et déterminer la valeur  $\beta$  de son minimum global. La fonction W de Lambert est définie comme étant la fonction réciproque de T sur  $[\beta, +\infty[$ . Reproduire le graphe de T représenté sur la partie gauche de la figure 2 et expliquer comment en déduire l'allure de W représenté sur la partie droite.

Figure 2 - Représentations graphiques de  $T(\chi)$  (à gauche) et  $W(\chi)$  (à droite)

12) On peut montrer que :  $[\chi + e^{W(\chi)}]W'(\chi) = 1$ . Quelle est la valeur de  $W(0)$  ?

On montre que si  $ad \neq 0$ , la solution de l'équation  $at + b + ce^{dt} = 0$  pour l'inconnue  $t$  est donnée par l'expression :

$$t = -\frac{b}{a} - \frac{1}{d} W \left[ \frac{cd}{a} e^{-bd/a} \right].$$

13) En déduire à quel instant  $t^* > 0$  le projectile touche le sol. On posera  $u = -\left(1 + \frac{v_0 \sin \theta_0}{g\tau}\right)$ .

14) On rappelle que par définition  $We^W = Id$  où  $Id$  est la fonction identité :  $\chi \rightarrow \chi$ .

En déduire que la portée est donnée par  $L = \tau v_0 \cos \theta_0 \left[1 - \frac{W(ue^{u})}{u}\right]$ .

En posant  $\gamma = \frac{v_0}{v_\infty}$ , on montre que l'angle initial donnant la portée maximale est :

$$\theta_{max} = \begin{cases} \arcsin \left[ \frac{\gamma W \left( \frac{\gamma^2 - 1}{e} \right)}{\gamma^2 - 1 - W \left( \frac{\gamma^2 - 1}{e} \right)} \right] & \text{si } \gamma \neq 1 \\ \arcsin \left( \frac{1}{e - 1} \right) \approx 35,6^\circ & \text{si } \gamma = 1 \end{cases}$$

15) À l'aide de la figure 2, déterminer la valeur numérique de l'angle assurant la portée maximale pour  $v_0 = 10 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$  et  $\tau = 0,4 \text{ s}$ .

**Partie B : L'intégrale elliptique de première espèce**

Dans toute cette partie on néglige les frottements de l'air.

On étudie un pendule simple constitué d'une masse ponctuelle  $m$  et d'une tige rigide de longueur  $l$  et de masse négligeable, astreint à évoluer dans un plan vertical  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ .

On repère sa position par l'angle  $\theta(t)$ .

À  $t = 0$  on lâche le pendule sans vitesse initiale avec  $\theta(t = 0) = \theta_0 \in ]0, \pi/2[$ .

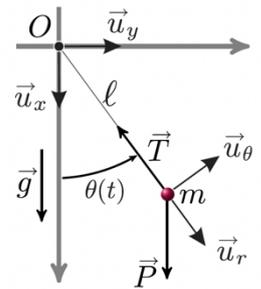


Figure 3 – Pendule simple

16) Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par la fonction  $\theta(t)$ .

17) On fait l'approximation des petits angles tels que  $\sin \theta \sim \theta$ .

Établir dans ces conditions la période  $T_0$  des oscillations.

Quelle est la propriété remarquable de la période dans le cadre de cette approximation ?

18) Déterminer l'expression générale de  $\frac{d\theta}{dt}$  sans faire l'approximation des petits angles.

En déduire que la période  $T$  des oscillations du pendule est donnée par :  $T = \frac{2T_0}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_0)}}$ .

La propriété remarquable de la question précédente est-elle conservée ?

En effectuant le changement de variable  $\sin \frac{\theta}{2} = \sin \phi \sin \frac{\theta_0}{2}$ , on montre que  $T = \frac{2T_0}{\pi} \mathcal{K} \left( \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \right)$  avec  $\mathcal{K}(\chi) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \chi \sin^2 \phi}}$ .

La fonction  $\mathcal{K}(\chi)$  est nommée intégrale elliptique complète de première espèce. Elle est implémentée en python dans scipy. On peut l'appeler directement avec « from scipy.special import ellipk » ce qui permet d'obtenir la figure 4.

19) En utilisant la figure 4, pour un pendule tel que  $T_0 = 1 \text{ s}$ , évaluer  $T$  lorsque  $\theta_0 = 50^\circ$ . Quel est le décalage temporel induit par la prise en compte de l'approximation des petits angles si l'on envisage de mesurer une heure ?

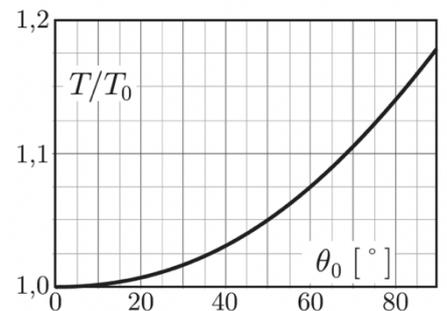


Figure 4 –  $\theta_0 \rightarrow T(\theta_0)/T_0$

Au XVII<sup>e</sup> siècle les puissances maritimes désiraient posséder des instruments précis pour la mesure du temps afin de faciliter la navigation (notamment pour déterminer la longitude). Les rois de France et d'Angleterre avaient offert des prix importants à qui serait capable de réaliser un chronomètre précis, fiable et utilisable en mer.

Christiaan Huygens (1629-1695) motivé par ce problème étudia le pendule conique et le pendule oscillant entre deux lames courbes. Il parvint à démontrer que des lames en forme de cycloïde assurent l'isochronisme rigoureux des oscillations.

Réponse :  $x = 0$ ,  $y = v_0 \tau \cos \theta_0 (1 - e^{-t/\tau})$ ,  $z = -gt\tau + \tau(v_0 \sin \theta_0 + g\tau)(1 - e^{-t/\tau})$ ; mouvement rectiligne uniforme de vitesse  $\vec{v}_0$  si  $t \ll \tau$ ; mouvement rectiligne à l'abscisse  $v_0 \tau \cos \theta_0$  et de vitesse  $-g\tau \vec{u}_z$  si  $t \gg \tau$ ;  $\beta = -1/e$ ;  $W(0) = 2$ ;  $t^* = \tau[-u + W(ue^u)]$ ;  $30^\circ$ ; 3 minutes par heure.

## VII Chute d'une gouttelette d'eau dans l'air

On considère les valeurs numériques suivantes pour tout le sujet :

- intensité de la pesanteur :  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$  ;
- viscosité dynamique de l'air :  $\eta_a = 2.10^{-5} \text{ Pa.s}$  ;
- viscosité dynamique de l'eau :  $\eta_e = 1.10^{-3} \text{ Pa.s}$  ;
- masse volumique de l'air :  $\rho_a = 1 \text{ kg.m}^{-3}$  ;
- masse volumique de l'eau :  $\rho_e = 1.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ .

Les résultats des applications numériques sont attendus avec seulement 1 chiffre significatif.

On rappelle que la surface d'une sphère de rayon  $r$  vaut  $4\pi r^2$  et que son volume s'écrit  $\frac{4}{3}\pi r^3$ .

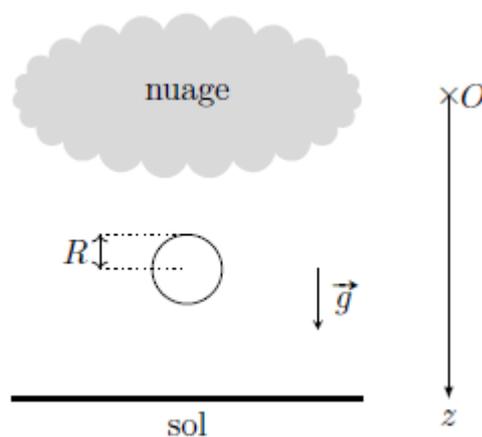
Un nuage est constitué d'une grande quantité de gouttelettes d'eau en suspension dans l'air. Il se forme par condensation de la vapeur d'eau naturellement présente dans l'atmosphère lorsque les conditions météorologiques sont adéquates. Ces gouttelettes en suspension grossissent en se réunissant sous l'effet des courants atmosphériques jusqu'à atteindre une taille critique, au-delà de laquelle elles tombent sous forme de pluie. Dans cette partie, nous allons étudier la chute d'une gouttelette d'eau à l'aide de deux modélisations pour l'atmosphère : le cas d'une atmosphère sèche, puis le cas d'une atmosphère humide.

### Partie A : Cas d'une atmosphère sèche

Dans un premier temps, on étudie la chute d'une gouttelette d'eau sphérique de masse volumique  $\rho_e$  et de rayon constant  $R = 0,2 \text{ mm}$  dans une atmosphère sèche, constituée d'air de masse volumique  $\rho_a$  et de viscosité dynamique  $\eta_a$ . On néglige tout phénomène d'évaporation au cours de cette chute. A l'instant  $t = 0$ , on suppose que la gouttelette quitte le nuage d'où elle provient, sans vitesse initiale. Elle est alors soumise à trois forces au cours de sa chute :

- son poids  $\vec{P}$  ;
- la poussée d'Archimède exercée par l'air  $\vec{P}_A$  ;
- une force de frottement fluide exercée par l'air que l'on modélise sous la forme :  $\vec{f} = -6\pi \eta_a R \vec{v}(t)$ , avec  $\vec{v}(t)$  le vecteur vitesse de la gouttelette.

On définit l'axe ( $Oz$ ) vertical descendant, comme représenté sur la **Figure 1**.



**Figure 1** : Chute d'une gouttelette d'eau de rayon constant  $R$  dans une atmosphère sèche.

- 1) Exprimer la norme de la poussée d'Archimède subie par la gouttelette en fonction des données de l'énoncé.
- 2) Calculer numériquement le rapport, en norme, de la poussée d'Archimède sur le poids de la gouttelette, puis justifier qu'il est possible de négliger la poussée d'Archimède dans cette modélisation.

Dans la suite, on négligera ainsi toujours la poussée d'Archimède.

- 3) Établir l'équation différentielle vérifiée par la composante  $v(t)$  de la vitesse de la gouttelette projetée sur l'axe  $(Oz)$  vertical descendant.
- 4) A partir de cette équation différentielle, définir un temps caractéristique  $\tau$  en fonction de  $R$ ,  $\rho_e$  et  $\eta_a$ , puis calculer sa valeur numérique.
- 5) En déduire l'expression de  $v(t)$  en fonction de  $g$ ,  $\tau$  et  $t$ .
- 6) Calculer numériquement la vitesse limite  $v_{lim}$  vers laquelle tend la gouttelette au cours de sa chute.

L'expression de la force de frottement utilisée dans cette modélisation n'étant valable que dans le cas d'un écoulement laminaire, il est nécessaire de vérifier cette hypothèse. On définit le nombre de Reynolds par  $R_e = \frac{2Rv_{lim}\rho_a}{\eta_a}$ . On considère que l'écoulement est laminaire si le nombre de Reynolds est inférieur à 2000.

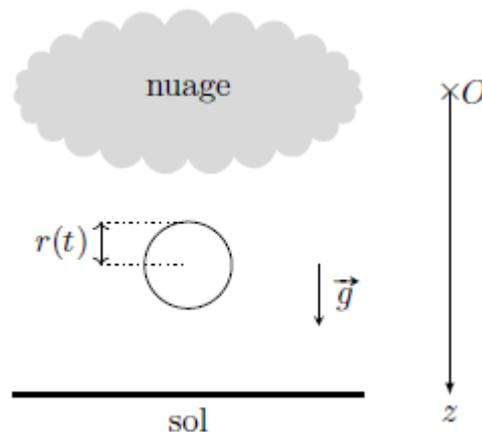
- 7) Calculer numériquement le nombre de Reynolds de l'air qui s'écoule autour de la gouttelette au cours de sa chute, puis conclure sur la validité de cette hypothèse.

### Partie B : Cas d'une atmosphère humide

On étudie maintenant la chute d'une gouttelette d'eau sphérique de masse volumique  $\rho_e$  dans une atmosphère humide, principalement constituée d'air de masse volumique  $\rho_a$  et de viscosité dynamique  $\eta_a$ . L'humidité du milieu fait croître le rayon  $r(t)$  de la gouttelette au cours de sa chute, et on note  $m(t)$  sa masse. A l'instant  $t = 0$ , on suppose que la gouttelette quitte le nuage d'où elle provient, sans vitesse initiale et avec un rayon initial  $r_0$ . En supposant que la poussée d'Archimède est toujours négligeable, la gouttelette est alors soumise à deux forces au cours de sa chute :

- son poids  $\vec{P}$  ;
- une force de frottement fluide exercée par l'air que l'on modélise sous la forme :  $\vec{f} = -6\pi\eta_a r(t)\vec{v}(t)$ , avec  $\vec{v}(t)$  le vecteur vitesse de la gouttelette.

On définit l'axe  $(Oz)$  vertical descendant, comme représenté sur la **Figure 2**.



**Figure 2 :** Chute d'une gouttelette d'eau de rayon variable  $r(t)$  dans une atmosphère humide.

8) En supposant que l'augmentation du volume de la gouttelette au cours du temps est proportionnelle à sa surface, justifier que son rayon peut alors s'exprimer sous la forme :  $r(t) = r_0 + k t$ , avec  $k$  une constante caractéristique de l'humidité du milieu, que l'on ne cherchera pas à exprimer.

9) Exprimer  $\frac{dm}{dt}$  en fonction de  $\rho_e$ ,  $r_0$ ,  $k$  et  $t$ .

Dans le cas d'un système de masse variable  $m(t)$ , on peut montrer que la seconde loi de Newton reste valable dans un référentiel galiléen à condition de remplacer le terme  $\left\{ m \frac{d\vec{v}}{dt} \right\}$  par  $\left\{ \frac{d(m\vec{v})}{dt} \right\}$ , ce qui donne en développant :  $\left\{ m \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt} \vec{v} \right\}$ .

10) Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la vitesse  $v(t)$  de la gouttelette projetée sur l'axe ( $Oz$ ) vertical descendant peut alors s'écrire sous la forme :  $\frac{dv}{dt} + \left[ \frac{A}{r_0 + k t} + \frac{B}{(r_0 + k t)^2} \right] v(t) = g$ , avec  $A$  et  $B$  des constantes que l'on exprimera en fonction de  $\rho_e$ ,  $\eta_a$  et  $k$ .

Quelques instants après le début de sa chute, le rayon de la gouttelette devient suffisamment important pour que le terme  $\frac{B}{(r_0 + k t)^2}$  de l'équation différentielle soit négligeable devant le terme  $\frac{A}{r_0 + k t}$ .

11) En prenant en compte cette simplification, résoudre l'équation différentielle obtenue en résolvant d'abord l'équation sans second membre, puis en cherchant une solution particulière de l'équation complète sous la forme d'une fonction affine, afin d'en déduire l'expression de  $v(t)$  en fonction de  $g$ ,  $r_0$ ,  $k$  et  $t$ .

Lorsque le rayon de la gouttelette d'eau dépasse quelques millimètres, il n'est plus réaliste de considérer que la forme de celle-ci est encore sphérique. En effet, la traînée aérodynamique donne alors une forme de disque incurvé à la gouttelette d'eau, qu'il serait nécessaire de prendre en compte.

12) Grâce à votre culture scientifique, donner le nom de l'énergie par unité de surface qui est responsable de la forme sphérique des gouttelettes d'eau de petites tailles.

Réponse :  $v(t) = \tau g (1 - e^{-t/\tau})$  avec  $\tau = \frac{2\rho_e R^2}{9\eta_a}$  ;  $A = 3k$  et  $B = \frac{9\eta_a}{2\rho_e}$  ;  $v(t) = \frac{gr_0}{4k} \left[ 1 - \left( \frac{r_0}{r_0 + kt} \right)^3 \right] + \frac{gt}{4}$ .