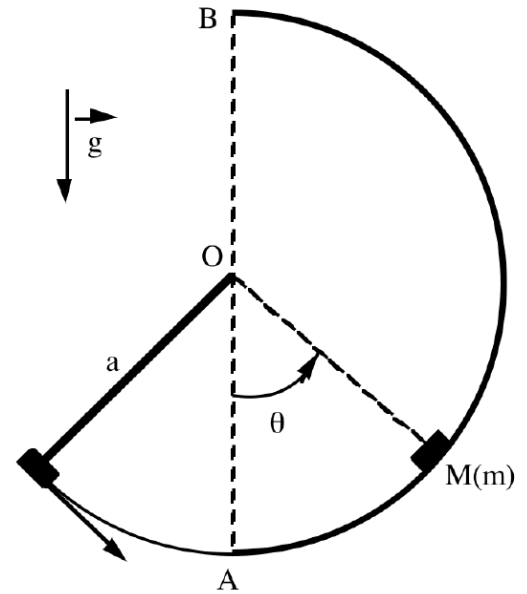


**ENERGIE**

**I** Un point matériel M de masse m est fixé à l'extrémité d'une tige OM de longueur a, de masse négligeable, mobile sans frottement autour d'un axe horizontal passant par O.

Soient OA et OB les positions d'équilibre stable et instable de OM.



1) La tige est abandonnée sans vitesse, M étant très légèrement à gauche de B.

Quelle est la vitesse  $v_A$  de M à son passage en A en fonction de g (accélération de la pesanteur) et a ?

2) Au passage en A, M se détache de la tige et se met à glisser sans frottement sur une demi - sphère de centre O et de rayon a.

a) Établir l'équation différentielle du mouvement de M sous la forme :

$\dot{\theta}^2 = 2\omega^2(1 + \cos\theta)$  en précisant la valeur de  $\omega^2$  en fonction de g et a.

b) Résoudre cette équation différentielle pour obtenir la loi du mouvement de M sur la sphère sous la forme  $\omega t = f(\theta)$  en précisant l'expression de la fonction  $f(\theta)$ .

On rappelle les formules suivantes :

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \quad \text{et} \quad \int \frac{dx}{\cos x} = \text{Ln} \left| \tan \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|.$$

3) Calculer la réaction R de la sphère en M en fonction de  $\theta$ .

Montrer qu'en un certain point C, M quitte la sphère. Calculer l'angle

correspondant  $\theta_C$ , la vitesse de M en C et exprimer numériquement en fonction de  $T_0 = 2\pi/\omega$  la durée T qui sépare les passages en A et en C.

4) Décrire brièvement le mouvement ultérieur de M.

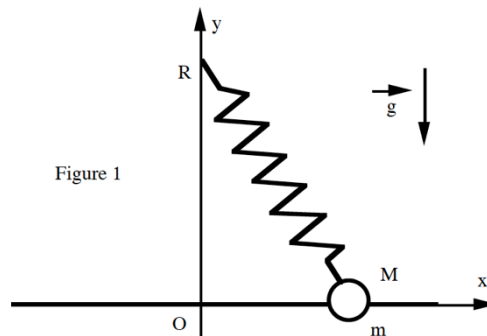
Réponse :  $v_A = 2\sqrt{ga}$  ;  $\omega = \sqrt{\frac{g}{a}}$  ;  $f(\theta) = \text{Ln} \left| \tan \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$  ;  $R = m g (2 + 3 \cos \theta)$  ;  $v_C = \sqrt{\frac{2ga}{3}}$  ;  $T = 0,246 T_0$ .

**II** L'objet de ce problème consiste à étudier les oscillations d'un système mécanique au voisinage d'une bifurcation (changement du nombre de positions d'équilibre, de la position d'équilibre stable, ...).

On s'intéresse au système mécanique suivant : un point matériel M de masse m est fixé à l'extrémité d'un ressort de longueur à vide  $l_0$  et de constante de raideur k. La masse peut coulisser sans frottement horizontalement sur une tige (figure 1). On repère la position de la masse m sur cette tige par l'abscisse x dont l'axe est confondu avec la tige, et dont l'origine O est située sur la même verticale que le point d'attache R fixe du ressort.

La tige se trouve à une distance l du point R :  $OR = l$ .

On posera  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .



**A. Positions d'équilibre**

1) Décrire qualitativement (en justifiant mais aucun calcul n'est demandé) le nombre de positions d'équilibre et la stabilité de celles-ci dans le cas  $l < l_0$  puis  $l > l_0$ .

2) Déterminer l'énergie potentielle élastique  $E_p(x)$  en fonction de k,  $l_0$ , l et x. On prendra  $E_p(0) = 0$ .

3) Expliquer dans le cas général où l'énergie potentielle  $E_p$  d'un point matériel de masse m ne dépend que d'un seul paramètre (dans

ce problème, il s'agit de  $x$ ), quelles sont les conditions sur  $E_p$  en un point d'équilibre stable. On dessinera l'allure de  $E_p(x)$  pour un équilibre stable et un équilibre instable.

4) Déterminer en utilisant les questions 2 et 3, les positions d'équilibre  $x_e$  de la masse  $m$  en distinguant les cas  $l > l_0$  et  $l < l_0$ . Dans chaque cas, préciser si la position d'équilibre est stable ou non.

5) Tracer, sur un même graphe,  $x_e$  en fonction de la distance  $OR = l$ . On précisera sur le graphe la nature de l'équilibre (stabilité ou instabilité). Pouvez-vous justifier alors le nom donné à la bifurcation (existant en  $l = l_0$ ) : bifurcation fourche.

### B. Pulsation autour d'une position d'équilibre stable

On cherche maintenant à déterminer les pulsations des oscillations autour des positions d'équilibre stable.

1) En écrivant le principe fondamental de la dynamique appliqué au point matériel de masse  $m$ , montrer que la pulsation s'exprime sous la forme générale :

$$\omega^2 = \frac{1}{m} \left( \frac{d^2 E_p}{dx^2} \right)_{x=x_e}$$

On pourra écrire la relation fondamentale de la dynamique dans le cas général où la force dérive d'une énergie potentielle  $E_p$  en développant celle-ci à l'ordre 2 en  $\varepsilon = x - x_e$  au voisinage proche de la position  $x = x_e$  d'équilibre.

2) Pour le système étudié, exprimer maintenant  $\omega^2$  en fonction de  $k$ ,  $m$ ,  $l$  et  $l_0$ . On distinguera les cas  $l > l_0$  et  $l < l_0$ .

3) Tracer  $\omega^2$  en fonction de  $l$ .

4) Montrer qu'au voisinage de  $l = l_0$ , on peut écrire la pulsation sous la forme :

$$l > l_0 : \omega = a (l - l_0)^\alpha$$

$$l < l_0 : \omega = b (l_0 - l)^{\alpha'}$$

Déterminer les exposants, dits critiques,  $\alpha$  et  $\alpha'$  ainsi que les coefficients  $a$  et  $b$ .

5) On s'intéresse au cas limite où  $l = l_0$ . On lâche la masse  $m$  sans vitesse initiale, écartée d'une distance  $x(0) = x_0$ .

a) Montrer graphiquement que le mouvement est périodique.

b) Par une méthode énergétique, exprimer la vitesse de la masse en fonction de  $x$ ,  $x_0$ ,  $k$ ,  $m$  et  $l_0$ .

c) Exprimer la période des oscillations en fonction de  $\omega_0$ ,  $x_0$ ,  $l_0$  et de l'intégrale  $I = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}$  dans l'hypothèse où  $x_0$  est très petit devant  $l_0$ .

d) Peut-on dire que cet oscillateur est harmonique ?

### C. Discussion

1) Le point matériel  $M$  est également relié à un autre ressort identique au premier, fixé lui aussi sur l'axe  $Oy$  à une distance  $l$  de la tige mais symétriquement à  $R$  par rapport à l'axe  $Ox$ . Qu'est-ce qui change par rapport à l'étude précédente ?

2)  $M$  n'est attaché qu'à un seul ressort, mais la tige  $Ox$  n'est pas tout à fait horizontale : elle est inclinée d'un petit angle  $\theta$ . Y-a-t'il un terme nouveau dans l'énergie potentielle ? Dessiner l'allure de  $E_p(x)$  pour  $l < l_0$  dans ce cas. Quelle est la conséquence principale sur les positions d'équilibre ?

Réponse :  $E_p(x) = \frac{1}{2}k(x^2 - 2l_0\sqrt{x^2 + l^2} + 2ll_0)$  ;  $x_e = 0$  existe toujours et stable si  $l > l_0$  ;  $x_e = \pm\sqrt{l_0^2 - l^2}$  si  $l < l_0$  et stable ;

$\omega^2 = \frac{k}{m} \left(1 - \frac{l_0}{l}\right)$  si  $l > l_0$  ;  $\omega^2 = \frac{k}{m} \left(1 - \frac{l^2}{l_0^2}\right)$  si  $l < l_0$  ;  $a = \frac{\omega_0}{\sqrt{l_0}}$  et  $\alpha = 1/2$  ;  $b = \omega_0 \sqrt{\frac{2}{l_0}}$  et  $\alpha' = 1/2$  ;

$v = \sqrt{\frac{k}{m} \left[ \left(\sqrt{l_0^2 + x_0^2} - l_0\right)^2 - \left(\sqrt{l_0^2 + x^2} - l_0\right)^2 \right]^{1/2}}$  ;  $T = \frac{8l_0 l}{\omega_0 x_0}$ .

III La force de résistance  $F$  exercée par l'eau sur certains modèles de navires et pour des vitesses  $v$  comprises entre  $10 \text{ km.h}^{-1}$  et  $20 \text{ km.h}^{-1}$  est une fonction du type :  $F = k.v^3$ .

1) Donner la valeur numérique de la constante  $k$  sachant que la vitesse limite atteinte par le navire est de  $18 \text{ km.h}^{-1}$  lorsque le moteur fournit une puissance propulsive  $P = 4 \text{ MW}$ .

2) Le moteur est coupé alors que le navire de masse  $12000 \text{ t}$  se déplace à une vitesse  $v_1 = 16 \text{ km.h}^{-1}$ . Calculer la valeur numérique de la durée  $t_0$  nécessaire pour que la vitesse du navire tombe à la valeur  $v_2 = 13 \text{ km.h}^{-1}$ .

3) Montrer que la distance  $d$  parcourue par le navire peut s'écrire :  $d = A (1/V_2 - 1/V_1)$ . On donnera l'expression de  $A$  en fonction de  $k$  et de  $m$  et l'on calculera la valeur numérique de  $d$ .

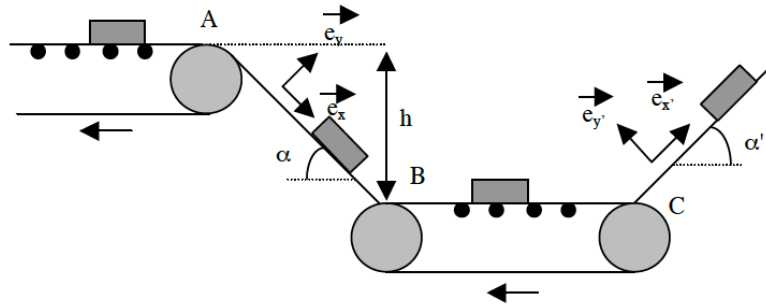
Réponse :  $k = 6400 \text{ kg.s.m}^{-2}$  ;  $t_0 = 24,4 \text{ s}$  ;  $A = m/k$  ;  $d = 97,1 \text{ m}$ .

#### IV Au tri postal

On étudie un convoyeur à colis présent dans un centre de tri postal.

1) Les colis sont d'abord déchargés par un tapis roulant à la vitesse  $v_A$ . Les colis glissent ensuite sur un plan de hauteur  $h$  incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale. Le coefficient de frottement solide entre les colis et le plan incliné est  $f$ . Les colis sont ensuite pris en charge au niveau du point B par un nouveau tapis roulant. Ce tapis avance à la vitesse  $v_B$ . Le convoyeur fonctionne correctement si les colis arrivent au point B avec la vitesse du deuxième tapis roulant.

- Donner l'expression littérale de l'angle  $\alpha$  qui permet un bon fonctionnement du convoyeur.
- Application numérique :  $v_A = 5 \text{ m.s}^{-1}$  ;  $v_B = 4 \text{ m.s}^{-1}$  ;  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$  ;  $h = 2 \text{ m}$  ;  $f = 0,1$ . Calculer  $\alpha$  en degrés.



2) A l'issue de leur trajet sur le deuxième tapis, les colis arrivent avec la vitesse  $v_C$  ( $v_C = v_B$ ) sur un nouveau plan incliné (angle  $\alpha'$  par rapport à l'horizontale, coefficient de frottement  $f$ ) afin d'être récupérés.

- Quelle est l'expression littérale de la distance  $D$  parcourue par le colis avant qu'il ne s'arrête ?
- A quelle condition sur  $\alpha'$  le colis reste-t-il ensuite immobile ?
- Dans le cas contraire, quelle est l'expression littérale de l'accélération  $\gamma_X$ , du colis lors de sa redescente ?
- Application numérique :  $\alpha' = \alpha$  puis  $\alpha' = 10^\circ$ . Calculer dans les deux cas la valeur numérique de  $D$ , et de  $\gamma_X$  le cas échéant.

Réponse :  $\tan \alpha = \frac{f}{1 - \frac{v_B^2 - v_A^2}{2gh}}$  ;  $\alpha = 4,7^\circ$  ;  $D = \frac{v_0^2}{2g(\sin \alpha' + f \cos \alpha')}$  ;  $\tan \alpha' < f$  ;  $\gamma_X = -g \cos \alpha' (\tan \alpha' - f)$  ;  $D = 4,4 \text{ m}$  ;

$D = 2,9 \text{ m}$  avec  $\gamma_X = -0,75 \text{ m.s}^{-2}$ .

#### V Pendule de Holweck et Lejay

On considère une barre homogène de masse négligeable et de longueur  $l$ , susceptible de tourner sans frottements autour de l'axe horizontal et soumise en O à l'action d'un ressort spiral. L'énergie potentielle de ce ressort, qui ne dépend que de l'angle  $\theta$  est de  $\frac{1}{2} C \theta^2$ . On place un objet de masse  $m$ , considéré comme ponctuel, à l'extrémité de cette tige. On étudie l'évolution de ce dispositif dans le référentiel terrestre, supposé galiléen. On notera  $g$  l'accélération de la pesanteur supposée uniforme.

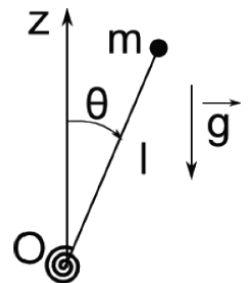
1) Dans le cas d'un problème unidimensionnel, où une force ne dépend que d'un seul paramètre de position que l'on appellera  $x$ , quelle est la relation liant la force  $\vec{F}$  à l'énergie potentielle  $E_p$  dont elle dérive ? À quelle(s) condition(s) a-t-on une position d'équilibre stable ?

2) Exprimer l'énergie potentielle du système  $E_p$  en fonction de l'angle  $\theta$  (on prendra la référence d'énergie potentielle de pesanteur pour  $\theta = 0$ ).

3) On se place maintenant dans le cas des petits angles au voisinage de  $\theta = 0$ . Effectuer un développement limité de l'expression précédente de l'énergie potentielle à l'ordre 2. Représenter  $E_p(\theta)$  en distinguant deux cas.

4) La position  $\theta = 0$  est-elle une position d'équilibre ? Discuter la stabilité éventuelle de cet équilibre.

5) Montrer que le mouvement peut être périodique au voisinage de  $\theta = 0$ . À quelle condition portant sur  $C$  est-ce possible ? Que deviendrait l'équation différentielle régissant de  $\theta(t)$  si l'on tient compte de frottements proportionnels à la vitesse angulaire ?



- 6) Exprimer la période  $T_0$  des petites oscillations en fonction de  $C$ ,  $m$ ,  $l$  et  $g$ .
- 7) Exprimer la période  $T'_0$  des oscillations si on retourne ce dispositif (le ressort est au repos lorsque la masse est en bas).
- 8) En déduire une expression de  $g$  en fonction des périodes  $T_0$  et  $T'_0$ .

Réponse :  $E_p(\theta) = \frac{1}{2}C\theta^2 + mgl(\cos\theta - 1) \approx (C - mgl)\frac{\theta^2}{2}$  ; Équilibre stable en  $\theta = 0$  si  $C > mgl$  ;  $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{C - mgl}}$  ;  
 $T'_0 = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{C + mgl}}$  ;  $g = 2\pi^2l\left(\frac{1}{T_0^2} - \frac{1}{T_0'^2}\right)$ .

## VI Tunnel terrestre

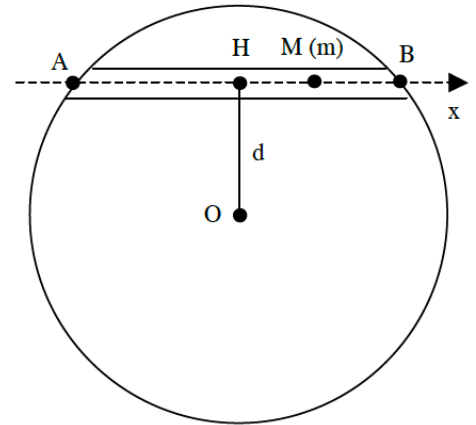
### 1) Question préliminaire

On considère un point  $M$  de masse  $m$  situé à l'intérieur de la Terre, à la distance  $r$  de son centre  $O$ .

On peut montrer que l'attraction terrestre se traduit par une force agissant sur ce point de valeur :  $\vec{F} = -mg_0\frac{r}{R}\vec{u}_r$ .

$g_0 = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  est l'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre,  $R = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$  est le rayon de la Terre,  $r = OM$  et  $\vec{u}_r = \frac{\vec{OM}}{OM} = \frac{\vec{OM}}{r}$  est le vecteur unitaire radial.

Montrer que cette force dérive de l'énergie potentielle  $E_p(r) = \frac{mg_0r^2}{2R}$  si l'on prend  $E_p(r=0) = 0$  au centre de la Terre.



2) On considère un tunnel rectiligne AB, d'axe Ox, ne passant pas par O et traversant la Terre. On note  $d$  la distance OH du tunnel au centre de la Terre.

Compte tenu de son faible diamètre devant le rayon terrestre, on néglige l'influence de la masse de terre excavée sur le champ gravitationnel.

Un véhicule, assimilé à un point matériel  $M$  (masse  $m$ ), glisse sans frottement dans le tunnel. Ce véhicule part du point A de la surface terrestre, sans vitesse initiale.

Quelle est la vitesse maximale  $v_m$  atteinte par le véhicule au cours de son mouvement ? Calculer  $v_m$  avec  $d = 5,0 \cdot 10^6 \text{ m}$ .

Exprimer  $x = \overline{HM}$  en fonction du temps par une méthode énergétique. Retrouver l'expression de  $v_m$ .

3) Représenter et commenter le profil d'énergie potentielle, graphe de  $E_p(x)$ . Décrire le mouvement du point  $M$  à partir de sa position initiale en A.

Réponse :  $v_m = \sqrt{g_0\left(R - \frac{d^2}{R}\right)}$  ;  $\ddot{x} + \frac{g_0}{R}x = 0$ .

## VII Pendule asymétrique

Un objet de masse  $m$  supposé ponctuel est fixé sur une tige, très légère, solidaire d'un cylindre de masse négligeable. Ce cylindre de rayon  $R$  et de masse négligeable peut tourner autour d'un axe horizontal.

La liaison pivot ainsi formée est parfaite et la distance de cet axe au mobile est notée  $l$ . Un fil sans masse est enroulé autour du cylindre de telle sorte qu'il ne glisse pas sur le cylindre (la puissance transmise par l'action du cylindre sur le fil est alors nulle).

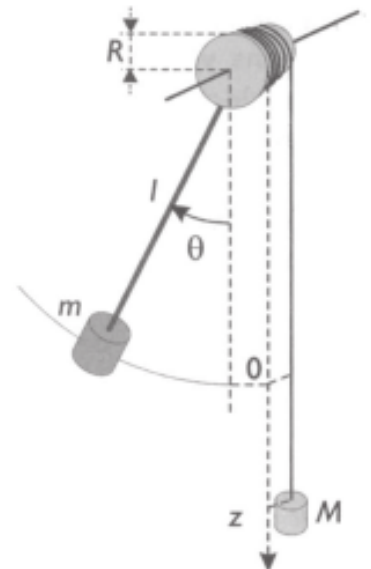
On fixe à l'extrémité libre du fil un objet de masse  $M$  (lui aussi supposé ponctuel). Lorsque le cylindre tourne d'un angle  $\theta$ ,  $M$  se déplace verticalement de  $z$  (on pose donc  $z = 0$  lorsque  $\theta = 0$ ).

Les variables  $\theta$  et  $z$  sont des grandeurs algébriques définies sur la figure ci-contre.

On admet que le système mécanique constitué par l'ensemble des deux masses est conservatif et que son énergie potentielle est la somme des énergies potentielles de pesanteur des deux masses.

On prendra l'origine des énergies potentielles à  $z = 0$ .

1) Le fil étant inextensible, établir une relation entre  $R$ ,  $\theta$  et  $z$  si les deux masses sont à la même altitude lorsque  $\theta = 0$ .



2) En déduire l'expression de l'énergie cinétique  $E_c$  du système constitué des deux masses en fonction de  $\dot{\theta} = d\theta/dt$  et des constantes nécessaires.

De même établir l'expression de l'énergie potentielle du même système  $E_p$  uniquement en fonction de  $\theta$  et des constantes nécessaires, en fixant  $E_p = 0$  pour  $\theta = 0$  :  $E_p = mgl.(1 - \cos\theta) - Mgr\theta$

3) Existe-t-il une ou plusieurs position(s) d'équilibre ? Si oui à quelle condition ? Le cas échéant on notera ces positions  $\theta_i$ , avec  $i = 1, 2, \dots$  et on donnera leur expression.

4) Dans toute la suite on suppose que les conditions sont réunies pour qu'il existe une ou des position(s) d'équilibre. Discuter de leur stabilité.

5) Établir l'équation du mouvement, c'est-à-dire l'équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par  $\theta$ .

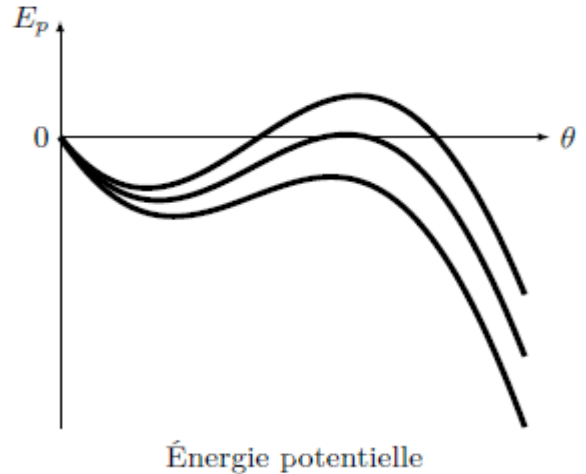
6) Développer cette équation au voisinage de chaque position

d'équilibre  $\theta_i$ , dans l'hypothèse de petits mouvements au voisinage de  $\theta_i$ . Cela confirme-t-il le caractère stable ou instable ? Le cas échéant quelle est la période des petites oscillations au voisinage de  $\theta_i$  ?

7) Le système est placé dans la position  $\theta = 0$  initiale. Les masses sont lâchées sans vitesse initiale à la date  $t = 0$ . La figure ci-dessous représente les énergies potentielles pour  $l = 50$  cm,  $R = 5$  cm,  $m = 100$  g et pour trois valeurs différentes de la masse  $M$ , à savoir  $M = 650$  g,  $720$  g et  $800$  g.

Reproduire ce schéma et associer à chaque valeur de  $M$  la courbe d'énergie potentielle. Décrire sommairement le mouvement obtenu. On justifiera clairement le raisonnement.

8) Le cas échéant, expliquer comment on peut calculer l'amplitude du mouvement oscillatoire, et sa période ? (On ne demande pas d'exécuter le calcul, mais d'en exposer le principe).



Réponse :  $z = R\theta$  ;  $E_c = \frac{1}{2}(ml^2 + MR^2)\dot{\theta}^2$  ;  $\theta_1 = \arcsin\left(\frac{MR}{ml}\right)$  stable et  $\theta_2 = \pi - \arcsin\left(\frac{MR}{ml}\right)$  instable si  $M \leq m \frac{l}{R}$  ;  
 $(ml^2 + MR^2)\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = Mgr$  ;  $(ml^2 + MR^2)\ddot{\varepsilon} + mgl\cos\theta_1\varepsilon = 0$  ;  $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2 + MR^2}{mgl\cos\theta_1}}$ .

**VIII Lancer du « poids »**

Pour éviter les confusions, nous appellerons « boulet » le projectile étudié afin de réserver le mot « poids » à la force de pesanteur.

Une athlète, de hauteur H bras levé, lance un boulet de masse m avec une vitesse initiale  $v_0$  située dans le plan xOy, sous l'angle  $\alpha$  par rapport au sol (figure 1). Le but de ce problème est d'étudier la modélisation d'un lancer puis de déterminer les conditions du « meilleur lancer ».

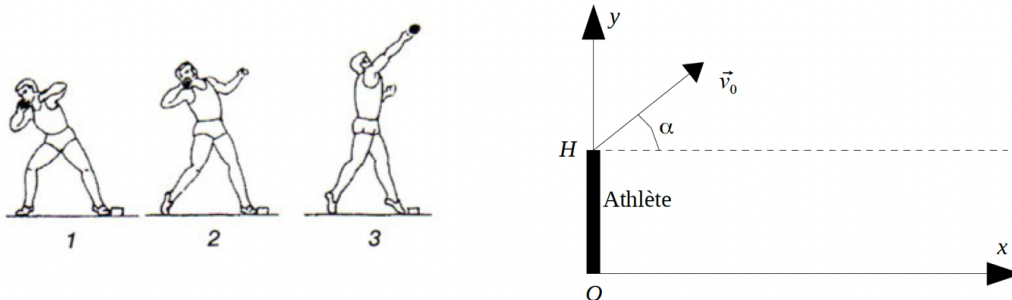


Figure 1 : Les trois phases finales du lancer du boulet et la modélisation mécanique pour l'étude du mouvement.

La surface de la Terre, horizontale et plane, est confondue avec le plan (Ox,Oz). Le trièdre orthonormé (Ox, Oy, Oz) lié au sol terrestre sera supposé galiléen. L'intensité  $g$  du champ de pesanteur terrestre est considérée comme constante.

Pour les applications numériques on prendra :  $m = 4,0$  kg ;  $v_0 = 10$  m.s<sup>-1</sup> ;  $g = 10$  m.s<sup>-2</sup> ;  $H = 2,0$  m.

**Étude du lancer**

On suppose que le boulet n'est soumis qu'à la force de pesanteur dès qu'il a quitté la main de l'athlète. Les conditions initiales du mouvement correspondent à l'instant et au point de l'espace où le boulet est lâché.

- 1) Déterminer la nature du mouvement du boulet selon l'axe Ox.
- 2) Au sommet S de la trajectoire, donner la valeur de la composante verticale de la vitesse du boulet, puis exprimer, en fonction de  $v_0$ ,  $g$  et  $\alpha$ , la durée TS nécessaire depuis le lancer pour que le boulet atteigne le sommet S.

On note  $(x_S, y_S)$  les coordonnées du sommet S de la trajectoire du boulet.

- 3) Établir l'expression de l'abscisse  $x_S$  en fonction de  $v_0$ ,  $g$  et  $\alpha$ .
- 4) Énoncer le théorème de l'énergie mécanique.
- 5) Calculer l'énergie mécanique du boulet à l'instant où il quitte la main de l'athlète. On supposera l'énergie potentielle du poids nulle au niveau du sol.
- 6) En utilisant les résultats des questions précédentes, déterminer l'expression de la coordonnée  $y_S$  en fonction de  $H$ ,  $v_0$ ,  $g$  et  $\alpha$ .
- 7) Application numérique : pour le cas  $\alpha = 30^\circ$ , calculer les valeurs numériques de TS,  $x_S$  et  $y_S$ .

**Détermination du meilleur lancer**

On cherche à déterminer l'angle  $\alpha_m$  qui est une valeur de l'angle  $\alpha$  qui permet de réaliser le meilleur lancer pour une vitesse initiale  $v_0$  fixée. On suppose  $\alpha$  compris entre 0 et  $\pi/2$ .

- 8) À partir des équations horaires du mouvement  $x(t)$  et  $y(t)$ , exprimer l'équation  $y(x)$  de la trajectoire du boulet.
- 9) Établir l'équation du second ordre régissant la coordonnée  $x_C$  du point de chute du boulet sur le sol. On mettra cette équation sous la forme :  $A x_C^2 + B x_C + C = 0$ , avec  $A = \frac{g}{2v_0^2}$ , B et C étant des paramètres ne dépendant que de H et  $\alpha$ .

Une étude mathématique de cette équation permet d'exprimer la valeur maximale de  $x_C$  noté  $x_{Cm}$  qui correspond au meilleur lancer.

On montre que :  $x_{Cm} = \frac{2H \cos \alpha_m \sin \alpha_m}{\cos^2 \alpha_m - \sin^2 \alpha_m}$  équation (1)

À partir de l'équation de la trajectoire, et en imposant les conditions des valeurs de  $x_{Cm}$  et  $\alpha_m$  on peut établir la relation :

$$\tan^2 \alpha_m = \frac{1}{1+aH} \quad \text{équation (2)}$$

$$\text{avec } a = \frac{2g}{v_0^2} \quad \text{équation (3).}$$

- 10) Montrer par une analyse dimensionnelle que l'expression de l'équation (3) conduit bien à une dimension correcte pour cette grandeur.

- 11) Établir l'expression  $x_{Cm} = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gH}$ . On pourra préalablement exprimer  $x_{Cm}$  en fonction de  $\tan \alpha_m$  à partir de l'équation (1), puis utiliser les équations (2) et (3).

- 12) Étudier qualitativement l'influence de la taille de l'athlète sur le meilleur lancer.

- 13) Application numérique : calculer  $x_{Cm}$  et  $\alpha_m$  à partir des données du problème.

Le record du monde féminin du lancer du poids est actuellement de 22,63 m.

$$\text{Réponse : } T_S = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} ; x_S = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} ; y_S = H + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} ; B = -\sin \alpha \cos \alpha \text{ et } C = -H \cos^2 \alpha.$$

## IX Déplacement d'un sac de sable

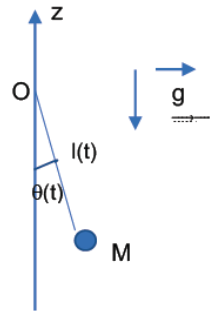
### 1) Ascension et chute

Une grue soulève verticalement un sac de sable de masse  $m = 200$  kg sur une hauteur  $h = 10$  m. On néglige les frottements de l'air et on choisira un axe vertical ( $Oz$ ) ascendant, l'origine  $O$  étant au niveau du sol. On donne l'accélération de la pesanteur  $g = 9,8$  m.s<sup>-2</sup>.

- Calculer le travail du poids au cours de l'ascension et commenter son signe.
- Arrivé à la hauteur  $h$ , le câble de la grue se rompt. Le sac tombe alors en chute libre avec une vitesse initiale supposée nulle. À l'aide du théorème de l'énergie cinétique, déterminer la vitesse  $v_0$  du sac assimilé à un point matériel juste avant que celui-ci touche le sol. Faire l'application numérique.
- Déterminer la loi horaire de la vitesse  $v(t)$  du sac et en déduire l'expression de la durée de la chute libre puis sa valeur numérique.

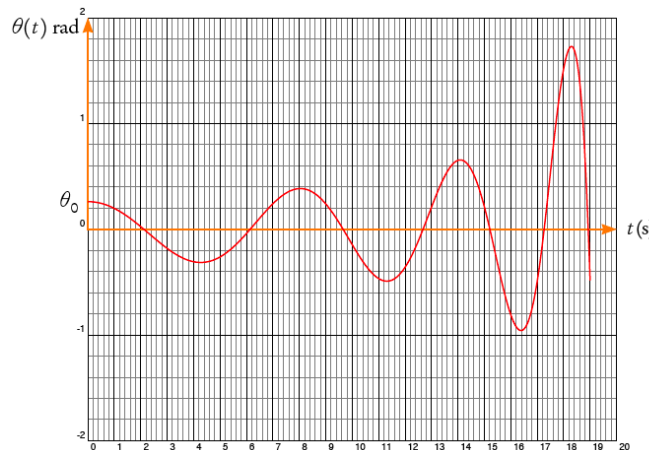
### 2) Mouvement pendulaire

Un sac de sable de masse  $m = 200$  kg utilisé pour la construction de la maison, assimilé à un point matériel  $M$ , est déplacé par une grue grâce à un treuil (voir schéma ci-contre). On néglige la masse du câble et les frottements de l'air et on suppose que le système se comporte comme un pendule simple de longueur variable, le câble étant enroulé sur le treuil à vitesse constante. La longueur  $\ell$  du câble varie selon l'équation horaire :  $\ell(t) = \ell_0 + kt$ .  $k < 0$  correspond au cas où le sac remonte,  $k > 0$  correspond au cas où le sac descend. On se place dans une base polaire d'origine  $O$  et de vecteurs mobiles  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$ . On souhaite établir l'équation différentielle vérifiée par  $\theta(t)$  et commenter la solution obtenue par analyse numérique.



- Donner les expressions des vecteurs position, vitesse et accélération dans la base choisie en fonction de  $k$ ,  $\ell(t)$ ,  $\dot{\theta}$  et  $\ddot{\theta}$ .
- Reproduire le schéma ci-dessus et y indiquer les forces s'exerçant sur  $M$ .
- Exprimer la tension du câble en fonction de  $m$ ,  $g$ ,  $\ell(t)$ ,  $\theta$  et  $\dot{\theta}$ .
- Dans le cadre de petits mouvements ( $\theta \ll 1$ ), montrer que l'équation différentielle vérifiée par  $\theta(t)$  se présente sous la forme canonique suivante :  $\ddot{\theta} + \frac{2k}{\ell(t)}\dot{\theta} + \frac{g}{\ell(t)}\theta = 0$ .

On donne ci-dessous l'allure de la courbe  $\theta(t)$ , obtenue après résolution numérique de l'équation différentielle précédente pour  $k = -1$  m.s<sup>-1</sup> (remontée du sac de sable),  $\theta_0 = 15^\circ$ ,  $\ell_0 = 20$  m.



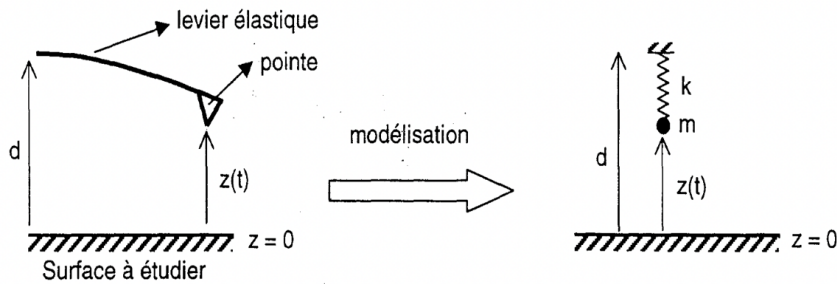
- Calculer la tension du câble à  $t = 0$  s.
- À quel instant la tension du câble est-elle maximale ? Commenter. Évaluer cette tension à l'instant  $t = 19$  s.

Réponse :  $W = -mgh$  ;  $v_0 = \sqrt{2gh}$  ;  $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$  ;  $T = m(g\cos\theta + l\dot{\theta}^2)$  ; 0,19 kN à  $t = 0$  et 7,0 MN à  $t = 19$  s.

## X Microscope à force atomique

Ces dernières années, de nouvelles techniques dites de "microscopies à champ proche" se sont développées pour étudier les surfaces. Parmi ces techniques, le microscope à force atomique permet de déterminer les caractéristiques topographiques, électriques ou magnétiques de la surface étudiée en mesurant la force exercée sur une fine pointe fixée à l'extrémité d'un levier élastique et placée à une distance comprise entre une fraction et quelques dizaines de nanomètres de la surface. Ce problème étudie le comportement mécanique de l'ensemble levier-pointe dans deux modes de fonctionnement classiques du microscope à force atomique.

Dans tout le problème, on modélise le système levier-pointe par une masse ponctuelle  $m$  fixée à un ressort sans masse, de longueur à vide nulle et de raideur  $k$ . La position instantanée de la pointe est notée  $z(t)$ , l'origine des ordonnées étant prise sur la surface à étudier. On note  $d$  la distance entre la surface et l'extrémité du ressort. On suppose de plus que l'interaction pointe/surface est décrite par une énergie potentielle notée  $U(z)$ . La force correspondante sera notée  $F(z)$ . On néglige la force de pesanteur.



On rappelle la formule de Taylor donnant l'expression de la fonction  $f(x)$  au voisinage de  $x = x_0$  :

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0) \left( \frac{df}{dx} \right)_{x_0} + \frac{1}{2} (x - x_0)^2 \left( \frac{d^2f}{dx^2} \right)_{x_0}.$$

### Partie A : Mode contact

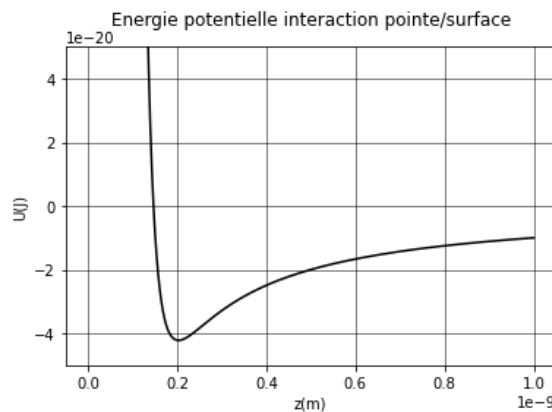
En mode dit "contact", lorsque la pointe est approchée de la surface, elle est soumise à une force atomique qui induit une déflexion du levier que l'on peut mesurer optiquement avec une grande sensibilité. On s'intéresse ici à quelques aspects de ce mode de fonctionnement liés à la stabilité des positions d'équilibre de la pointe.

- 1) En supposant  $d$  fixée, écrire la condition d'équilibre de la pointe pour une position  $z = z_0$ .
- 2) Montrer que la condition de stabilité de cet équilibre est :

$$k + \left( \frac{d^2U}{dz^2} \right)_{z=z_0} > 0.$$

On suppose dans toute la suite de cette partie que  $U(z)$  a pour expression :  $U(z) = \frac{A}{z^7} - \frac{B}{z}$  avec  $A \approx 10^{-88} \text{ J.m}^7$  et  $B \approx 10^{-29} \text{ J.m}$ .

- 3) a) On donne ci-dessous le graphe de  $U(z)$ .



En déduire l'allure de celui de  $F(z)$  et commenter.

- b) Proposer une méthode graphique pour déterminer les positions d'équilibre de la pointe lorsque  $d$  est fixée.
- c) Montrer que lorsque  $k$  est supérieur à une valeur critique  $k_c$ , que l'on déterminera, toutes les positions d'équilibre sont stables, quelle que soit la valeur de  $d$ .

Application numérique : évaluer  $k_c$ .

- 4) On suppose que la pointe est à l'équilibre à une distance  $z_0$  de la surface telle qu'elle se trouve dans la partie répulsive de la courbe d'interaction ( $F(z_0) > 0$ ). On prendra  $z_0 = 0,1 \text{ nm}$  et  $k = 100 \text{ N.m}^{-1}$ .



- a) Cet équilibre est-il stable ?  
 b) Montrer qu'une variation  $\delta d$  de la distance  $d$  ( $|\delta d| \ll d$ ) entraîne une variation  $\delta z$  ( $|\delta z| \ll z_0$ ) de la distance pointe/surface donnée par :

$$\delta z = \delta d \left[ 1 - \frac{1}{k} \left( \frac{dF}{dz} \right)_{z_0} \right]^{-1}$$

*Indication* : on pourra effectuer un développement limité de la fonction  $F(z)$  au voisinage de la position  $z = z_0$ .

- c) Évaluer numériquement le coefficient de proportionnalité entre  $\delta d$  et  $\delta z$ , après avoir vérifié qu'une telle position correspond bien à  $F(z_0) > 0$ .  
 d) En déduire que dans de telles conditions, une mesure de l'allongement du ressort lorsqu'on déplace la pointe au-dessus de la surface donne directement la topographie de celle-ci.

## Partie B : Mode résonant

La pointe étant située initialement en la position d'équilibre  $z_0$ , étudier le mouvement qu'elle peut adopter en restant au voisinage de cette position.

5) Quelle sera alors la fréquence des vibrations de faible amplitude qui peuvent alors y apparaître ?

Application numérique pour  $m = 1,4 \cdot 10^{-8}$  kg (on conservera les autres valeurs numériques de la partie précédente).

*Ce dernier résultat permet de faire apparaître une fréquence propre de vibration, qui intervient ce mode d'utilisation de l'instrument où l'on fait vibrer le levier, excité mécaniquement par une force oscillante, à quelques dizaines de nanomètres de la surface et où l'on exploite le phénomène de résonance.*

Réponse :  $E_p = U + \frac{1}{2}k(d - z)^2$  ;  $F = -\frac{dU}{dz}$  ; équilibre à l'intersection de la courbe  $F(z)$  et de la droite  $k(z - d)$  ;

$$k_C = \left( \frac{dF}{dz} \right)_{z_C} = -\frac{56A}{z_C^9} + \frac{2B}{z_C^3} = 0,46 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \text{ avec } z_C = \left( \frac{504A}{6B} \right)^{1/6} = 3 \cdot 10^{-10} \text{ m} ; \delta z \approx 0,02 \delta d ; f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{m} \left( \frac{d^2 E_p}{dz^2} \right)_{z_0}} = 100 \text{ kHz}.$$

## XI Remonte-pente (résolution de problème)

*Toute démarche pertinente, même non achevée, fera l'objet d'attribution de points.*

Un remonte-pente est constitué d'un câble auquel les skieurs s'accrochent pour remonter.

Déterminer la puissance  $P$  du moteur qui entraîne le câble.

Données :

- Longueur totale du câble :  $L = 200$  m ;
- Distance séparant deux skieurs :  $d = 5$  m ;
- Dénivelé entre les deux extrémités du câble :  $h = 50$  m ;
- Vitesse du câble :  $v = 5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  ;
- Lorsque le ski glisse sur la neige, la réaction tangentielle  $\vec{R}_T$  du sol sur le ski est reliée à la réaction normale  $\vec{R}_N$  par  $\|\vec{R}_T\| = f \|\vec{R}_N\|$  avec  $f \approx 0,1$  ;
- Masse moyenne d'un skieur :  $m = 70$  kg ;
- Accélération de la pesanteur :  $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .



Réponse :  $P = \frac{mgvL(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{d(1+f)} \approx 12 \text{ kW}$  où  $\alpha$  est l'angle d'inclinaison de la piste par rapport à l'horizontale, et en prenant un angle d'inclinaison de la perche par rapport à la piste de  $45^\circ$ .