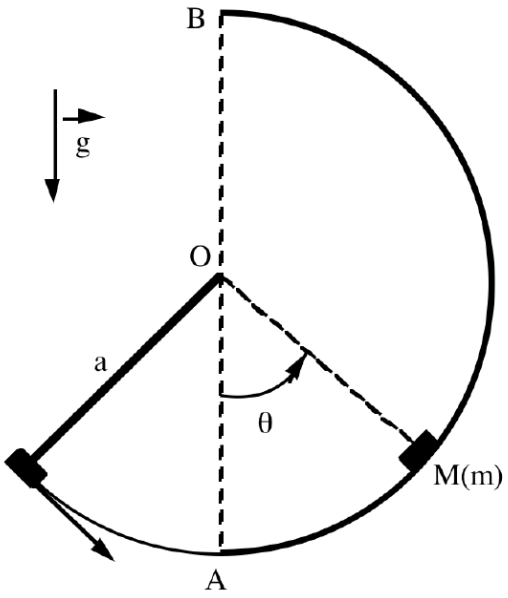
ENERGIE

I Un point matériel M de masse m est fixé à l'extrémité d'une tige OM de longueur a, de masse négligeable, mobile sans frottement autour d'un axe horizontal passant par O.
Soient OA et OB les positions d'équilibre stable et instable de OM.



1) La tige est abandonnée sans vitesse, M étant très légèrement à gauche de B.

Quelle est la vitesse v_A de M à son passage en A en fonction de g (accélération de la pesanteur) et a ?

2) Au passage en A, M se détache de la tige et se met à glisser sans frottement sur une demi - sphère de centre 0 et de rayon a.

a) Établir l'équation différentielle du mouvement de M sous la forme :

$\dot{\theta}^2 = 2\omega^2(1 + cos\theta)$ en précisant la valeur de ω^2 en fonction de g et a.

b) Résoudre cette équation différentielle pour obtenir la loi du mouvement de M sur la sphère sous la forme ωt = f(θ) en précisant l'expression de la fonction f(θ).

On rappelle les formules suivantes :

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ et $\int \frac{dx}{cosx} = Ln\left|tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$.

3) Calculer la réaction R de la sphère en M en fonction de θ.
Montrer qu'en un certain point C, M quitte la sphère. Calculer l'angle correspondant θC, la vitesse de M en C et exprimer numériquement en fonction de $T_0 = 2\pi/\omega$ la durée T qui sépare les passages en A et en C.

4) Décrire brièvement le mouvement ultérieur de M.

Réponse : $v_A = 2\sqrt{ga}$; $\omega = \sqrt{\frac{g}{a}}$; $f(\theta) = Ln\left|tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$; R = m g (2 + 3 cos θ); $v_C = \sqrt{\frac{2ga}{3}}$; T = 0,246 T_0.

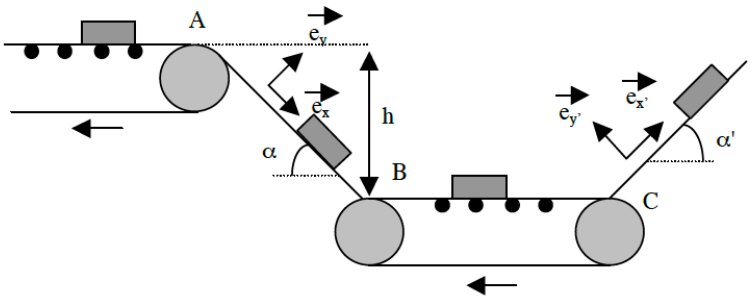
II Au tri postal

On étudie un convoyeur à colis présent dans un centre de tri postal.

1) Les colis sont d'abord déchargés par un tapis roulant à la vitesse v_A. Les colis glissent ensuite sur un plan de hauteur h incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Le coefficient de frottement solide entre les colis et le plan incliné est f. Les colis sont ensuite pris en charge au niveau du point B par un nouveau tapis roulant. Ce tapis avance à la vitesse v_B. Le convoyeur fonctionne correctement si les colis arrivent au point B avec la vitesse du deuxième tapis roulant.

a) Donner l'expression littérale de l'angle α qui permet un bon fonctionnement du convoyeur.

b) Application numérique : $v_A = 5$ m.s^{-1} ; $v_B = 4$ m.s^{-1} ; g = 10 m.s^{-2} ; h = 2 m ; f = 0,1. Calculer α en degrés.



2) A l'issue de leur trajet sur le deuxième tapis, les colis arrivent avec la vitesse v_C ($v_C = v_B$) sur un nouveau plan incliné (angle α' par rapport à l'horizontale, coefficient de frottement f) afin d'être récupérés.

a) Quelle est l'expression littérale de la distance D parcourue par le colis avant qu'il ne s'arrête ?

b) A quelle condition sur α' le colis reste-t-il ensuite immobile ?

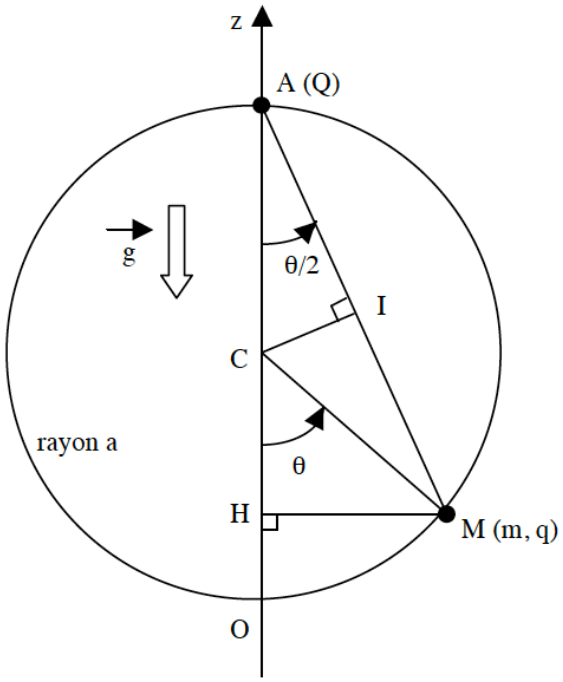
c) Dans le cas contraire, quelle est l'expression littérale de l'accélération γ_X, du colis lors de sa redescente ?

d) Application numérique : α' = α puis α' = 10°. Calculer dans les deux cas la valeur numérique de D, et de γ_X le cas échéant.

Réponse : $tan\alpha = \frac{f}{1-\frac{v_B^2-v_A^2}{2gh}}$; α = 4,7° ; $D = \frac{v_0^2}{2g(sin\alpha' + f cos\alpha')}$; tan α' < f ; γx = -g cos α' (tan α' – f) ; D = 4,4 m ;

D = 2,9 m avec γx = - 0,75 m.s^{-2}.

III On assimile à un point matériel M de masse m un petit anneau susceptible de coulisser sans frottement le long d'un cercle fixe de centre C et de rayon a contenu dans le plan vertical. Porteur d'une charge q, M subit l'action d'une charge Q fixée au point A du cercle de cote maximum. Il subit donc entre autres une force électrique s'écrivant $\vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{AM}}{AM^3}$, qui dérive de l'énergie potentielle électrique $E_{pe} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 AM}$.



On se propose d'étudier les mouvements possibles de M en utilisant la méthode énergétique.

1) Effectuer le bilan des forces s'exerçant sur le point M.

2) Donner l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur Epp du point M

a) en fonction de m, g (accélération de la pesanteur) et z cote du point M). L'axe Oz est pris vertical, ascendant, avec origine en O (point du cercle de cote minimum). La référence de cette énergie potentielle sera prise en O.

b) en fonction de m, g, a et θ.

3) Exprimer l'énergie potentielle électrique Epe en fonction de l'angle θ, où plutôt en fonction de θ/2. On pourra pour cela utiliser avantageusement la figure, et en particulier le point I, projection orthogonale du centre C du cercle sur le segment AM.

4) Déduire des questions précédentes l'énergie potentielle réduite totale du point M, quantité sans dimension, définie par la relation suivante : $u = \frac{E_p}{mga} = \frac{E_{pp}+E_{pe}}{mga}$.

Montrer qu'elle se met sous la forme $u(\theta) = -\frac{4\lambda^3}{cos\frac{\theta}{2}} + 1 - cos\theta$, en précisant l'expression de λ^3.

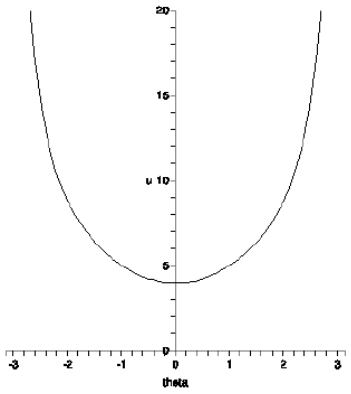
Justifier rapidement le fait que la constante λ soit sans dimension à partir de son expression.

5) Montrer que $u'(\theta) = \frac{du(\theta)}{d\theta} = 2sin\frac{\theta}{2}\left(cos\frac{\theta}{2} - \frac{\lambda^3}{cos^2\frac{\theta}{2}}\right)$.

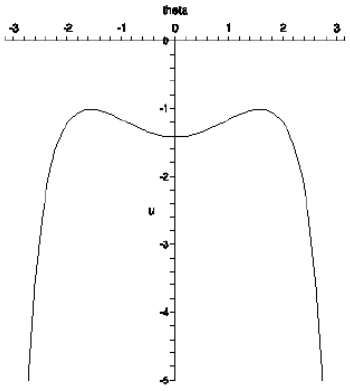
6) Chercher la(les) position(s) d'équilibre possible(s) pour le point M dans les trois cas suivants (le dispositif étant symétrique par rapport à la verticale OA, on se limitera au domaine [0, π[pour θ) :

(α) : λ < 0 ;
(β) : 0 < λ < 1 ;
(γ) : λ > 1.

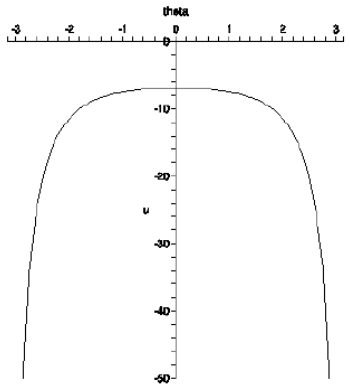
7) A l'aide de l'étude précédente, on trace la fonction u(θ) dans les trois cas précédents :



(α) : λ < 0



(β) : 0 < λ < 1



(γ) : λ > 1

Reproduire l'allure de ces courbes. Indiquer dans chaque cas sur le graphe les positions d'équilibre, en précisant leur nature (stable ou instable).
Indiquer qualitativement la nature du mouvement du point M quand il est lancé du point O avec une vitesse initiale.
8) Dans le cas où θ = 0 est une position d'équilibre stable, on cherche à déterminer la période T des petites oscillations au voisinage de cette position.

a) Exprimer l'énergie cinétique Ec de M en fonction de m, a et $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$.

b) Effectuer un développement limité de u à l'ordre 2 en θ.
On pourra utiliser certaines des formules suivantes :

$cos\varepsilon \approx 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$ et $(1+\varepsilon)^\beta \approx 1 + \beta\varepsilon$ pour ε << 1;

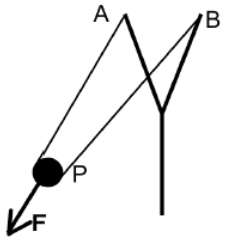
formule de Taylor $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)[f'(x)]_{x_0} + \frac{(x-x_0)^2}{2}[f"(x)]_{x_0} + \cdots$.

c) En déduire l'expression de l'intégrale première de l'énergie. Justifier rapidement le fait que l'énergie mécanique du système soit constante au cours du mouvement.
d) En déduire l'équation différentielle du mouvement au voisinage de θ = 0.
e) En déduire la période T des petites oscillations, d'abord en fonction de a, g et λ, puis en fonction de λ et To (période propre du pendule simple de longueur a).

Réponse : $\lambda^3 = -\frac{qQ}{32\pi\varepsilon_0 mga^2}$; $T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\lambda^3}}$.

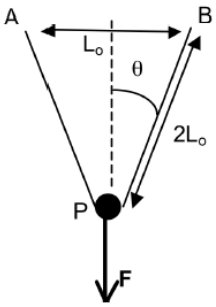
IV Étude d'un lance-pierres

1) Définir l'énergie potentielle d'une force ; est-ce toujours possible ? Établir l'expression de l'énergie potentielle correspondant à l'allongement (à définir) d'un ressort ou d'un élastique de raideur k.
2) On fabrique un lance-pierres avec deux élastiques identiques. Ceux-ci se comportent comme des ressorts de longueur à vide L0 et de raideur k, à condition que leur allongement soit positif. Pour lancer un projectile P de masse m, on le serre dans un petit morceau de cuir fixé entre les deux élastiques qu'on allonge symétriquement jusqu'à ce qu'ils aient une longueur L = 2L0, puis on lâche (voir figures ci-contre : perspective et vue de dessus).



On précise que AB = L0 et on néglige l'épaisseur de P.

a) On envisage un tir horizontal : quelle est la longueur des élastiques quand ils cessent de pousser le projectile P ? En déduire la vitesse à laquelle celui-ci est lancé ; faire l'application numérique.



b) Déterminer en fonction de k et L0 la force (quasi horizontale) à exercer pour tendre les élastiques selon la description ; faire l'application numérique.

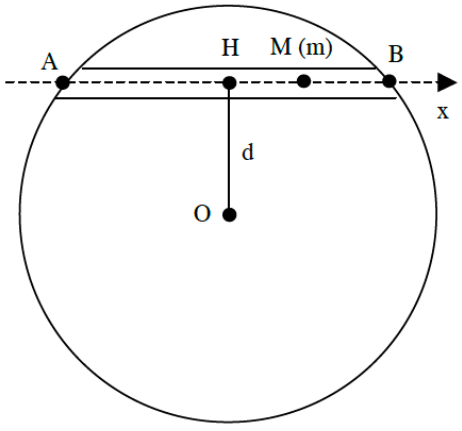
c) Un individu tire horizontalement depuis le bord d'une falaise avec la vitesse initiale v0 ; son projectile subit une force de frottement fluide : $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$.
Déterminer et interpréter la loi d'évolution du vecteur vitesse.
En déduire la distance horizontale atteinte en supposant la falaise suffisamment élevée.

Pour les applications numériques (A.N.), on prendra : L0 = 10 cm ; m = 10 g ; k = 200 N/m.

Réponse : $v_0 = L_0\sqrt{\frac{2k}{m}}$; F = 2kL0cosθ ; $\vec{v} = (\vec{v}_0 - \vec{v}_\infty)e^{-t/\tau} + \vec{v}_\infty$ avec τ = m/α et $\vec{v}_\infty = \tau\vec{g} = \frac{m\vec{g}}{\alpha}$; portée $x_\infty = \tau v_0 = \frac{mv_0}{\alpha}$.

V Tunnel terrestre

1) Question préliminaire
On considère un point M de masse m situé à l'intérieur de la Terre, à la distance r de son centre O.
On peut montrer que l'attraction terrestre se traduit par une force agissant sur ce point de valeur : $\vec{F} = -mg_0\frac{r}{R}\vec{u}_r$.



g_0 = 10 m.s^{-2} est l'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre, R = 6,4.10^6 m est le rayon de la Terre, r = OM et $\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM} = \frac{\overrightarrow{OM}}{r}$ est le vecteur unitaire radial.

Montrer que cette force dérive de l'énergie potentielle $E_p(r) = \frac{mg_0r^2}{2R}$ si l'on prend Ep(r = 0) = 0 au centre de la Terre.

2) On considère un tunnel rectiligne AB, d'axe Ox, ne passant pas par O et traversant la Terre. On note d la distance OH du tunnel au centre de la Terre.
Compte tenu de son faible diamètre devant le rayon terrestre, on néglige l'influence de la masse de terre excavée sur le champ gravitationnel.
Un véhicule, assimilé à un point matériel M (masse m), glisse sans frottement dans le tunnel. Ce véhicule part du point A de la surface terrestre, sans vitesse initiale.

Quelle est la vitesse maximale v_m atteinte par le véhicule au cours de son mouvement ? Calculer v_m avec d = $5{,}0.10^6$ m.

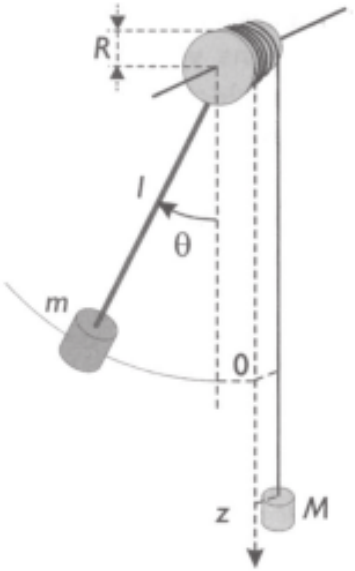
Exprimer $x = \overline{HM}$ en fonction du temps par une méthode énergétique. Retrouver l'expression de v_m.

3) Représenter et commenter le profil d'énergie potentielle, graphe de Ep(x). Décrire le mouvement du point M à partir de sa position initiale en A.

Réponse : $v_m = \sqrt{g_0\left(R - \frac{d^2}{R}\right)}$; $\ddot{x} + \frac{g_0}{R}x = 0$.

VI Pendule asymétrique

Un objet de masse *m* supposé ponctuel est fixé sur une tige, très légère, solidaire d'un cylindre de masse négligeable. Ce cylindre de rayon *R* et de masse négligeable peut tourner autour d'un axe horizontal.
La liaison pivot ainsi formée est parfaite et la distance de cet axe au mobile est notée *l*. Un fil sans masse est enroulé autour du cylindre de telle sorte qu'il ne glisse pas sur le cylindre (la puissance transmise par l'action du cylindre sur le fil est alors nulle).
On fixe à l'extrémité libre du fil un objet de masse *M* (lui aussi supposé ponctuel). Lorsque le cylindre tourne d'un angle θ, M se déplace verticalement de *z* (on pose donc $z = 0$ lorsque $\theta = 0$).
Les variables θ et *z* sont des grandeurs algébriques définies sur la figure ci-contre.
On admet que le système mécanique constitué par l'ensemble des deux masses est conservatif et que son énergie potentielle est la somme des énergies potentielles de pesanteur des deux masses.
On prendra l'origine des énergies potentielles à $z = 0$.

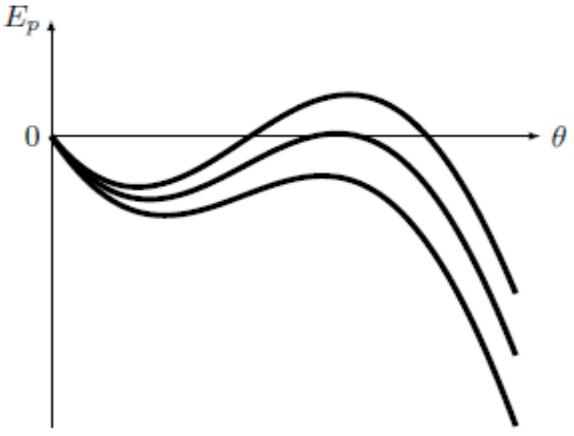


1) Le fil étant inextensible, établir une relation entre *R*, θ et *z* si les deux masses sont à la même altitude lorsque $\theta = 0$.

2) En déduire l'expression de l'énergie cinétique E_C du système constitué des deux masses en fonction de $\dot{\theta} = d\theta/dt$ et des constantes nécessaires.

De même établir l'expression de l'énergie potentielle du même système Ep uniquement en fonction de θ et des constantes nécessaires, en fixant Ep = 0 pour θ = 0 : $E_p = mgl.(1 - cos\theta) - MgR\theta$

3) Existe-t-il une ou plusieurs position(s) d'équilibre ? Si oui à quelle condition ? Le cas échéant on notera ces positions θ_i, avec *i* = 1, 2, ... et on donnera leur expression.
4) Dans toute la suite on suppose que les conditions sont réunies pour qu'il existe une ou des position(s) d'équilibre. Discuter de leur stabilité.
5) Établir l'équation du mouvement, c'est-à-dire l'équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par θ.
6) Développer cette équation au voisinage de chaque position d'équilibre θ_i, dans l'hypothèse de petits mouvements au voisinage de θ_i. Cela confirme-t-il le caractère stable ou instable ?
Le cas échéant quelle est la période des petites oscillations au voisinage de θ_i ?
7) Le système est placé dans la position $\theta = 0$ initiale. Les masses sont lâchées sans vitesse initiale à la date $t = 0$. La figure ci-dessous représente les énergies potentielles pour l = 50 cm, R = 5 cm, m = 100 g et pour trois valeurs différentes de la masse *M*, à savoir M = 650 g, 720 g et 800 g.
Reproduire ce schéma et associer à chaque valeur de *M* la courbe d'énergie potentielle. Décrire sommairement le mouvement obtenu. On justifiera clairement le raisonnement.



Énergie potentielle

8) Le cas échéant, expliquer comment on peut calculer l'amplitude du mouvement oscillatoire, et sa période ? (On ne demande pas d'exécuter le calcul, mais d'en exposer le principe).

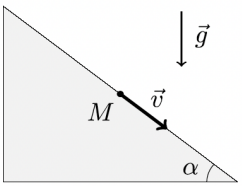
Réponse : z = Rθ ; $E_c = \frac{1}{2}(ml^2 + MR^2)\dot{\theta}^2$; $\theta_1 = arcsin\left(\frac{MR}{ml}\right)$ stable et $\theta_2 = \pi - arcsin\left(\frac{MR}{ml}\right)$ instable si $M \leq m\frac{l}{R}$;
$(ml^2 + MR^2)\ddot{\theta} + mglsin\theta = MgR$; $(ml^2 + MR^2)\ddot{\varepsilon} + mglcos\theta_1\varepsilon = 0$; $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2+MR^2}{mglcos\theta_1}}$.

VII La luge : un sport olympique

La luge est devenue un sport olympique en 1964 à Innsbruck (Autriche). Le lugeur est allongé sur le dos et les pieds en avant, sur la luge qui glisse sur une piste de glace. Pour freiner, le lugeur ne peut compter que sur ses pieds car la luge ne comporte pas de frein. Les spécialistes peuvent atteindre des vitesses supérieures à 100 km/h.
Pour la modélisation, on assimile l'ensemble {luge + lugeur} (désigné par la suite sous le terme simple de luge) à un point matériel M de masse m = 100 kg. La piste est considérée comme un référentiel galiléen. L'accélération de la pesanteur est prise égale à g = 10 m.s^{-2}.

Partie A : Descente rectiligne

Après la phase de poussée, la luge atteint une vitesse v_0 = 5,0 m.s^{-1}.
Elle descend ensuite une piste rectiligne de pente constante, inclinée de 10% (on descend verticalement de 10 m quand on avance horizontalement de 100 m). On appelle α l'angle que fait la piste avec l'horizontale.
Les frottements sont négligés devant les autres forces en jeu. Le point M est ainsi en mouvement rectiligne uniformément accéléré.



1) Effectuer le bilan des forces qui s'exercent sur la luge et dessiner un schéma représentant ces forces, en justifiant soigneusement leur direction et leur sens.

2) Par application de la relation fondamentale de la dynamique, exprimer et calculer numériquement l'accélération a de la luge en fonction de l'accélération de la pesanteur g et de l'angle α.

3) L'origine des temps est fixée juste après la phase de poussée. Donner l'expression de la vitesse en fonction du temps. Au bout de quelle durée t_a la luge atteint-elle la vitesse v_a = 25 m.s^{-1} ? Donnez l'expression analytique du résultat et faites l'application numérique.

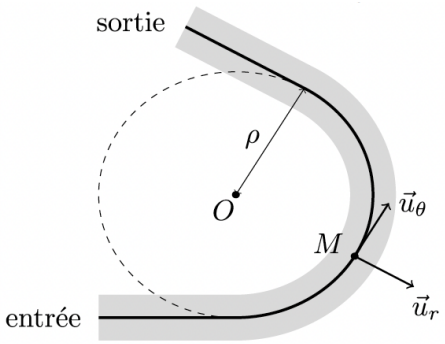
4) Quelle est la distance d parcourue lorsque la luge atteint la vitesse v_a ? Donnez l'expression analytique du résultat et faites l'application numérique.

5) La luge franchit la ligne d'arrivée à la vitesse v_b = 30 m.s^{-1}. Le ralentissement à l'arrivée se fait sur une piste inclinée de 10% (on monte de 10 m quand on avance horizontalement de 100 m). On note l'angle d'inclinaison α.

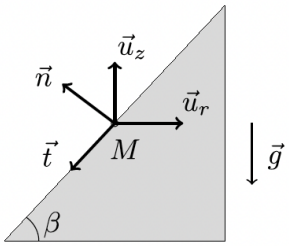
a) Déterminer la longueur L de la piste de ralentissement nécessaire pour que la luge passe de v_b = 30 m.s^{-1} à l'arrêt en utilisant une méthode énergétique.
b) Faire l'application numérique et conclure sur la faisabilité de cette méthode de ralentissement.
c) Pour une modélisation plus réaliste, on souhaite prendre en compte les frottements même s'ils sont faibles en prenant un coefficient de frottement μ = 0,10 ici.
En tenant compte des frottements, que vaut maintenant la longueur L' nécessaire pour la piste de ralentissement ? L'effet des frottements était-il en effet négligeable ou non ?

Partie B : Virage circulaire

À présent, le point M est en mouvement circulaire uniforme à la vitesse V, sur un cercle de rayon ρ. La piste est inclinée latéralement d'un angle β ∈]0, π/2 [. La trajectoire se situe dans un plan horizontal donc la vitesse est : $\vec{v} = V\vec{u}_\theta$.
Le trièdre de vecteur unitaires $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ est orthonormé direct.
On désigne par $\vec{R} = R_T\vec{t} + R_N\vec{n}$ la réaction de la piste, qui n'est pas uniquement normale. Les vecteurs unitaires $\vec{t}$ (tangent) et $\vec{n}$ (normal) sont définis sur la figure de droite ci-dessous.



Vue de dessus de la piste



Vue en coupe de la piste

6) Refaire le schéma vu de dessus et représenter la vitesse et l'accélération. Exprimer l'accélération $\vec{a}$ en fonction de V, ρ et de $\vec{u}_r$.

7) La luge n'étant soumise qu'à son poids et à la réaction du support, écrire la relation fondamentale de la dynamique en projection dans le repère $(\vec{t}, \vec{n})$. On représentera les forces sur un schéma de la vue en coupe de la piste.

8) En déduire les expressions des réactions R_N et R_T en fonction de V, ρ, β, g, et m.

9) Quelle est la valeur V_c de la vitesse pour laquelle la réaction tangentielle est nulle ? Écrire alors R_T en fonction de m, ρ β et $(V^2 - V_C^2)$.

Soit f = 0,30 le coefficient de frottement latéral de la luge sur la piste de glace. Les lois du frottement solide indiquent que la luge ne dérape pas tant que $|R_T| < f|R_N|$. Dans la suite des questions, on ne considère que le cas $V > V_c$ ce qui correspond à un dérapage possible vers l'extérieur du virage.

10) Montrer que V doit respecter l'inégalité suivante pour éviter le dérapage : $V^2(cos\beta - fsin\beta) < g\rho(sin\beta + fcos\beta)$.

11) En déduire que si l'inclinaison β est suffisante, il n'y aura jamais dérapage quelle que soit la vitesse V. Donner l'inclinaison minimale à respecter, qui dépend uniquement du coefficient f. Faire l'application numérique en degrés.

12) Si cette inclinaison minimale n'est pas respectée, montrer que la condition de non-dérapage impose une vitesse V à ne pas dépasser, à exprimer en fonction de g, ρ, β et f. Que risque la luge si sa vitesse est trop grande ?

13) Montrer à partir des résultats précédents qu'en l'absence de frottement latéral, on ne pourrait aborder le virage qu'à la vitesse V_c. Les frottements permettent ainsi d'avoir une certaine marge de vitesse dans un virage.

Réponse : $a = gsin\alpha$; $v(t) = gsin\alpha t + v_0$; $t_a = \frac{v_a - v_0}{gsin\alpha}$; $d = \frac{v_a^2 - v_0^2}{2gsin\alpha}$; $L = \frac{v_b^2}{2gsin\alpha}$; $L' = \frac{v_b^2}{2g(sin\alpha + \mu cos\alpha)}$; $\vec{a} = -\frac{V^2}{\rho}\vec{e}_r$;
$R_T = m\frac{V^2}{\rho}cos\beta - mgsin\beta$ et $R_N = m\frac{V^2}{\rho}sin\beta + mgcos\beta$; $V_C = \sqrt{\rho g tan\beta}$ et $R_T = \frac{m}{\rho}cos\beta(V^2 - V_C^2)$; $\beta_{min} = arctanf$;
$V_{max} = \sqrt{\frac{g\rho(sin\beta + fcos\beta)}{cos\beta - fsin\beta}}$.

VIII Jean-Claude Dusse aux sports d'hiver

Pour profiter des chutes de neige récentes, Jean-Claude Dusse décide de s'offrir une séance de motoneige. La masse totale de l'ensemble (supposé ponctuel) est de m = 120 kg et le moteur délivre une puissance totale P_m = 1000 W par l'intermédiaire de la chenille. La phase de poussée se déroule sur une partie horizontale et sera étudiée dans la première partie. Les phases suivantes (montée d'un côté puis descente) seront étudiées dans la partie suivante.

On note g = 9,8 $m.s^{-2}$ l'intensité de pesanteur et on néglige les frottements sur la neige fraîche bien damée.

Partie A : Lancement

1) Rappeler le lien entre travail et puissance P.

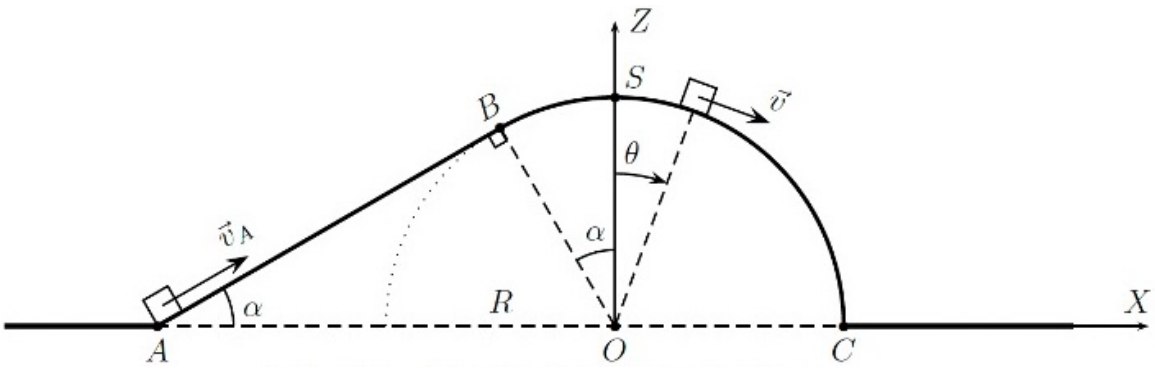
2) Énoncer le théorème de l'énergie cinétique.

3) Combien de temps t_A sera nécessaire pour que Jean-Claude atteigne une vitesse de $v_A = 20\ m.s^{-1}$?
Un résultat analytique en fonction des données du problème puis une application numérique sont attendus.

À partir de maintenant, le moteur étant, coupé, la motoneige glisse dorénavant sur ses patins.

Partie B : Glisse

Dans cette partie on étudie le mouvement de Jean-Claude sur la piste composée d'une portion rectiligne AB et inclinée d'un angle α = 30 ° par rapport à l'horizontale, et d'une portion circulaire BC, de rayon R = 2,0 m et d'angle (BO, OC) = π/2 + α (figure ci-dessous). L'orientation positive des angles sera prise dans le sens horaire.



Jean-Claude part initialement depuis A avec la vitesse $\vec{v}_A$.

4) Portion rectiligne AB
   a) Énoncer le théorème de l'énergie mécanique.
   b) En déduire l'expression littérale de la vitesse v_B au point B en supposant que ce point est bien atteint.
   c) Afin que B soit effectivement atteint par la motoneige, il est nécessaire que $v_A > v_{Al}$.
   Déterminer l'expression littérale puis numérique de v_{Al}.

Pour les questions suivantes, on suppose la condition précédente vérifiée.

5) Portion circulaire BC.
   a) Énoncer le principe fondamental de la dynamique.
   b) En déduire l'expression en fonction de θ, $\dot{\theta}$ et des constantes m, g et R de la réaction normale R_N du support sur M lors de la phase du mouvement sur l'arc BC.
   c) Déterminer la relation liant v, θ, v_A et les constantes du problème. On pourra utiliser une méthode énergétique.
   d) En déduire R_N en fonction des constantes, θ et v_A.
   e) À quelle condition sur v_A (expression littérale puis numérique) n'y aura-t-il pas de décollage de M avant le sommet S ?
   f) La condition précédente étant vérifiée, déterminer l'expression θ_d de θ pour laquelle la motoneige M quitte la piste ?
   g) La condition précédente étant toujours vérifiée, déterminer l'expression v_d de la vitesse au décollage (c'est-à-dire en θ_d).

Réponse : $t_A = \frac{mv_A^2}{2P_m}$; $v_B = \sqrt{v_A^2 - 2gRcos\alpha}$; $v_{Al} = \sqrt{2gRcos\alpha}$; $R_N = m\left(gcos\theta - R\dot{\theta}^2\right) = m\left(3gcos\theta - \frac{v_A^2}{R}\right)$; $v_A \leq \sqrt{3gRcos\alpha}$; $\theta_d = arccos\frac{v_A^2}{3gR}$; $v_d = \frac{v_A}{\sqrt{3}}$.

IX Rebond d'une goutte d'eau

Il est possible de réaliser par traitement chimique d'une plaque métallique une surface plane parfaitement hydrophobe : une goutte d'eau posée sur cette surface n'y est en contact qu'en un seul point et on constate qu'elle adopte une forme sphérique si elle est suffisamment petite (observation O_1).

Lorsqu'on lâche une goutte sphérique de rayon $a_0 \approx 1.0$mm sans vitesse initiale à une hauteur $h = 10$ cm au-dessus de la plaque supposée horizontale et qu'on filme avec une caméra rapide, on constate que la goutte reste au contact du plan hydrophobe pendant une durée τ de l'ordre de quelques millisecondes (observation O_2). Pendant cette phase, la goutte s'aplatit puis s'arrondit avant de décoller.

Une fois qu'elle a décollé, la goutte qui a récupéré sa forme sphérique remonte jusqu'à une altitude maximale inférieure à h avant de retomber. Le processus se répète ensuite avec cinq à dix rebonds perceptibles (observation O_3).

Le but du problème est de proposer des modèles simples tentant d'interpréter ces observations.

Données numériques :

masse volumique de l'eau $\rho_e = 1{,}0$ kg/L ;
coefficient de tension superficielle entre l'air et l'eau : $A = 7{,}0 \times 10^{-2}$ J/m^2 ;
rayon de la goutte considérée : $a_0 = 1{,}0$ mm ;
hauteur depuis laquelle les gouttes sont lâchées : $h = 10$ cm ;
champ de pesanteur terrestre $g = 9{,}8$ m/s^2.

A. Forme des gouttes, rôle de la tension superficielle

Dans toute cette partie, la goutte est supposée au repos. Pour faciliter les calculs, on adopte une géométrie différente de la réalité (goutte sphérique) en considérant la goutte de forme cylindrique de rayon a et de hauteur e comme représenté sur la Figure 1.

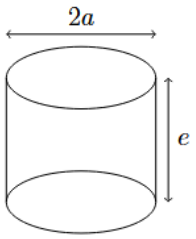


FIGURE 1 – Modélisation de la goutte d'eau.

Du fait que le contact avec la goutte réelle est ponctuel, on admet que, dans le modèle cylindrique, **toute** la surface du cylindre (y compris sa base) est en contact avec l'air.
L'expérience montre que les interactions entre l'eau et l'air sont associées à une énergie potentielle de la forme :
$E_{p,t} = A.S$

où S est l'aire de l'interface eau-air et A une constante positive appelée coefficient de tension superficielle.

Dans cette partie, on néglige la pesanteur.

1. Exprimer le volume V de la goutte cylindrique et sa surface totale de contact avec l'air S en fonction de son rayon a et sa hauteur e. Expliciter e en fonction de V et a.

2. En déduire son énergie potentielle de tension superficielle en fonction de a, A et V.

3. Montrer que, pour V et A fixés, la valeur a_0 de a pour laquelle $E_{p,t}$ passe par un minimum est : $a_0 = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/3}$.

4. Vérifier que la valeur correspondante de l'épaisseur de la goutte est $e_0 = 2a_0$ et commenter.

5. En déduire l'expression du minimum de l'énergie potentielle en fonction de A et a_0.

6. Donner des expressions approchées de $E_{p,t}(a)$ lorsque $a \to 0$ et lorsque $a \to \infty$. Tracer l'allure du graphe de Ep,t en fonction de a.

7. Déterminer, pour V et A fixés, l'expression de la valeur de la dérivée seconde de l'énergie potentielle en fonction de A :

$$\frac{\partial^2 E_{p,t}}{\partial a^2}(a_0)$$

En déduire qu'au voisinage de $a = a_0$, on peut mettre, à une constante additive près, l'énergie potentielle de tension superficielle sous une forme analogue à l'énergie potentielle élastique d'un ressort de raideur k, de longueur à vide l_0 et de longueur a avec $k = 12\pi A$ et $l_0 = a_0$.

B. Modèle mécanique du rebond de la goutte

L'analyse de la partie (A) conduit à modéliser la tendance d'une goutte à reprendre une forme sphérique par un ressort de raideur k. Pour prendre en compte par ailleurs l'inertie de la goutte et d'inévitables frottements internes, on adopte le modèle de la figure 2 : on attache sous une masse ponctuelle m = 6,3 mg un patin (P) plan, de masse nulle via un ressort de raideur k = 2,6 N/m et de longueur à vide e_0 ; et un amortisseur qui exerce sur m une force de la forme : $\vec{F} = -f\,\dot{e}\,\vec{e_z}$ où e est la distance entre la masse m et le patin et $\dot{e}$ la dérivée temporelle de e. Le ressort et l'amortisseur sont montés en parallèle.

On néglige la masse du ressort et la masse de l'amortisseur. Dans ce modèle, toute la masse de la goutte est concentrée en son sommet.

À chaque instant t, on repère les mouvements du système par la cote $z(t)$ de la masse m et par
la cote $Z(t)$ du patin (P), la cote nulle étant prise sur la plaque fixe.

Le système est abandonné avec les conditions initiales $z(0) = h + e_0$, $\dot{z}(0) = 0$, $e(0) = e_0$ et $\dot{e}(0) = 0$. On néglige les forces exercées par l'air.

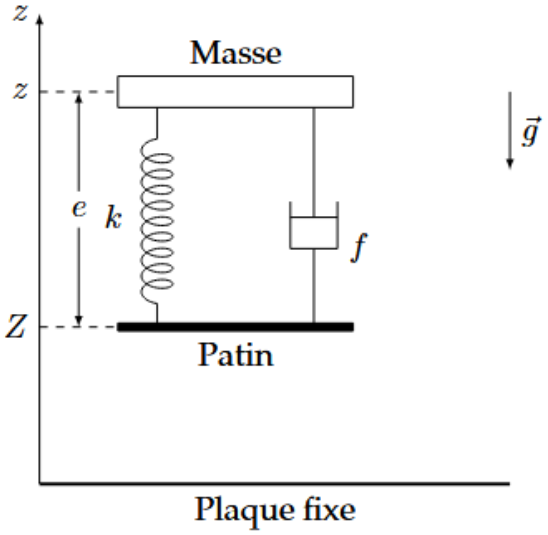


FIGURE 2 – Modèle mécanique de la goutte

1. En considérant que la goutte est en chute libre et que $e(t)$ reste constamment égal à e_0 durant cette chute, déterminer en fonction de h et g, l'expression du module de la vitesse $v_0 = |\dot{z}(t_0)|$ de la masse m à l'instant t_0 où le patin touche la plaque de cote $z = 0$. Calculer numériquement v_0.

On fixe désormais l'origine des temps $t = 0$ au moment où le patin touche la plaque. Du fait de sa masse nulle, sa vitesse devient instantanément nulle. On repère alors l'évolution de l'épaisseur $e(t)$ avec les conditions initiales $e(0) = e_0$ et $\dot{e}(0) = -v_0$.

Dans toute la suite du problème, on considère que le poids de la goutte est négligeable devant toutes les autres forces en jeu.

2. On suppose que le patin reste au contact de la plaque. Montrer que l'équation différentielle décrivant l'évolution de $\delta(t) = e(t) - e_0$ se met sous la forme :

$$\ddot{\delta} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\delta} + \omega_0^2\delta = 0$$

où l'on exprimera les constantes positives ω_0 et Q en fonction de m, k et f.

3. On suppose $Q^2 \gg 1$. En déduire que la solution générale est de la forme :

$$\delta(t) = exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right)(Bcos(\omega_0 t) + Csin(\omega_0 t))$$

et déterminer les expressions des constantes B et C en fonction de v_0 et ω_0. Expliciter δ(t).

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note t_n la suite des instants correspondant aux maxima successifs de $\delta(t)$.
On admet que les oscillations de $\delta(t)$ sont perceptibles tant que leur amplitude $\delta(t_n)$ reste supérieure ou égale à 10% de la valeur initiale $\delta(t_0)$. Exprimer le nombre d'oscillations perceptibles en fonction de Q. Combien peut-on en observer si $Q = 7$? On conservera cette valeur de Q pour la suite.

On s'intéresse désormais à la possibilité de décollement du patin. On note forme $\vec{R} = R\,\vec{e_z}$ l'action de contact exercée par la plaque fixe sur le patin.

5. Établir l'expression de $\vec{R}$ en fonction de k, f, δ, $\dot{\delta}$ et $\vec{e}_z$.

6. En limitant les calculs à l'ordre 1 en $1/Q$, montrer que :

$$R = m\omega_0 v_0 exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right)\left(sin(\omega_0 t) + \frac{1}{Q}cos(\omega_0 t)\right)$$

7. Déterminer l'instant $\tau > 0$ où le patin décolle. Calculer sa valeur. Le modèle est-il en accord avec les observations ?

8. Dans les conditions de repos, la goutte est modélisée comme un cylindre de rayon a_0 et de hauteur $e_0 = 2a_0$. Exprimer la masse de la goutte en fonction de a_0 et ρ_e. On néglige le terme $1/Q$ dans l'expression de la durée caractéristique τ. Montrer que le modèle prévoit que l'évolution de τ en fonction de a_0 est donnée par :

$$\log(\tau) = constante + \frac{3}{2}\log(a_0)$$

9. Une étude expérimentale sur des gouttes dont les rayons sont compris entre 0,5 mm et 2,0 mm a permis de tracer le graphe suivant :

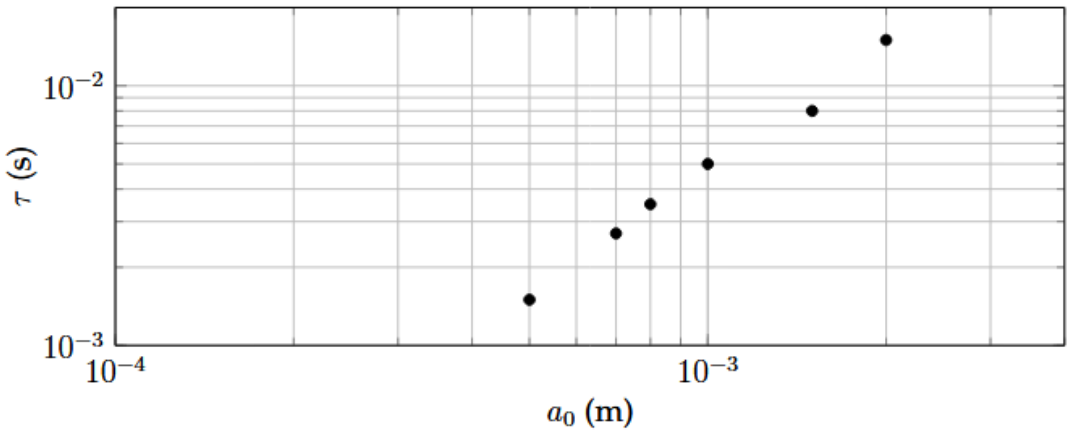


FIGURE 3 – Évolution de τ en fonction de a_0

Cette expérience valide-t-elle le modèle étudié ici ?

Réponse : $E_{p,t} = 2\pi A a^2 + \frac{2AV}{a}$; $E_{p,tmin} = 6\pi A a_o^2$; $\frac{\partial^2 E_{p,t}}{\partial a^2}(a_0) = 12\pi A$; $k = 12\pi A$ et $l_o = a_o$; $v_o = \sqrt{2gh}$; $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q = \frac{1}{f}\sqrt{km}$; $\delta(t) = -\frac{v_o}{\omega_o} exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right) sin(\omega_0 t)$; $n = \frac{Q}{\pi} Ln10$; $\vec{R} = -\left(f\dot{\delta} + k\delta\right)\vec{e}_z$; $\tau = \frac{1}{\omega_o}\left(\pi - arctan\frac{1}{Q}\right)$; pente ≈ 1,7 proche de 3/2.