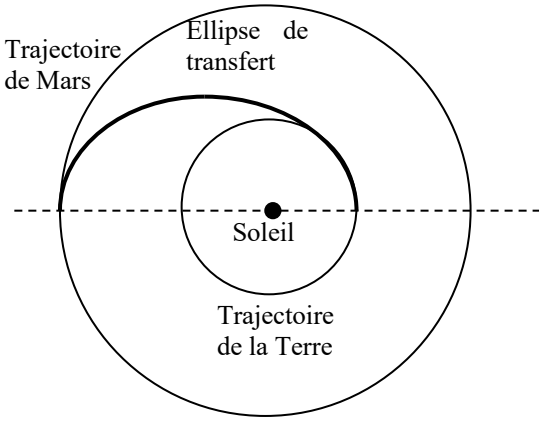
FORCES CENTRALES CONSERVATIVES

I Au cours d'un voyage interplanétaire, un vaisseau spatial de masse m = 1 t est transféré depuis la Terre jusqu'à la planète Mars. Ce transfert s'effectue suivant une orbite elliptique (ellipse d'Hohmann) tangente aux deux orbites coplanaires, pratiquement circulaires, de la Terre et de Mars, de rayons respectifs $R_1 = 1{,}5.10^8$ km et $R_2 = 2{,}3.10^8$ km, et dont le Soleil est un foyer. On négligera l'attraction exercée par les planètes sur le vaisseau et on ne considérera que l'attraction solaire.



On donne la masse du Soleil $M = 2.10^{30}$ kg ; constante de gravitation universelle $G = 6{,}67.10^{-11}$ S.I.

Déterminer en fonction de R_1, R_2, G et M, puis calculer numériquement :

1) l'excentricité e et le paramètre p de l'orbite de transfert d'Hohmann, et la constante des aires $C = \sqrt{pGM}$ de cette orbite ;
2) la durée T de ce voyage interplanétaire Terre-Mars ;
3) l'augmentation de vitesse qu'il faut communiquer au vaisseau
   a) lors du lancement depuis la terre ;
   b) lors de son arrivée sur la planète mars ;
4) la position relative angulaire que doit avoir la planète Mars par rapport à la Terre à l'instant où le vaisseau quitte la terre.

Réponse : $e = \frac{R_2-R_1}{R_2+R_1}$; $p = \frac{2R_1R_2}{R_1+R_2}$; $C = \sqrt{2GM\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}}$; $T = \frac{p}{\sqrt{GM}}\left(\frac{R_1+R_2}{2}\right)^{3/2}$;
$\Delta v_T = \sqrt{\frac{GM}{R_1}}\left(\sqrt{\frac{2R_2}{R_1+R_2}}-1\right)$; $\Delta v_M = \sqrt{\frac{GM}{R_2}}\left(1-\sqrt{\frac{2R_1}{R_1+R_2}}\right)$; 45°.

II Satellite Hipparcos

Le satellite Hipparcos lancé le 8 août 1987 était constitué principalement d'un télescope de 30 cm de diamètre. Celui-ci a permis d'établir un catalogue des positions, distances et éclats de plus de 118 000 étoiles avec une précision jamais atteinte.

Ce satellite devait être placé sur une orbite géostationnaire à une altitude H = 36 000 km. Un problème de mise à feu du moteur d'apogée a laissé Hipparcos sur son orbite de transfert, son altitude variant entre h et H. Après utilisation des moteurs de positionnement, l'altitude minimale a été portée à h = 500 km. Une programmation du satellite a permis de s'affranchir des problèmes liés à cette orbite.

Au cours d'une révolution, il passe dans la ceinture de Van Hallen. On supposera que cette ceinture est comprise entre deux sphères de rayon r_1 = 8 400 km et r_2 = 28 000 km et de centre celui de la Terre. La ceinture de Van Hallen est constituée de particules chargées piégées dans le champ magnétique terrestre. Ces particules aveuglent les détecteurs d'Hipparcos interrompant les mesures des positions des étoiles. Il est cependant utilisable à 65%.

On assimile la Terre à une sphère de centre O, de rayon R = 6 400 km et de masse M et le satellite à un point matériel (S, m). On suppose le référentiel géocentrique R_{gc} galiléen. La période de rotation de la Terre dans ce référentiel appelée jour sidéral vaut T = 86 164 s. On note G la constante de gravitation, sa valeur numérique n'est pas utile dans ce problème.

A Moment cinétique

1) Montrer que le moment cinétique $\vec{L}$ en O du satellite est une constante du mouvement.
2) On utilise les coordonnées cylindriques $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ avec $\vec{u}_z$ tel que $\vec{L} = L\vec{u}_z$.
   Montrer que le mouvement est plan et exprimer $r^2\dot{\theta}$ en fonction de L et m.
   Quelle est le nom de cette grandeur ?

B Vecteur excentricité

1) Montrer que $\vec{e} = \vec{u}_\theta - \frac{L}{GmM}\vec{V}$ est une constante du mouvement ($\vec{V}$ étant la vitesse du satellite).

2) On choisit l'origine de l'angle polaire pour avoir $\theta = (\vec{e}, \vec{u}_\theta)$.
Montrer que l'équation de la trajectoire peut se mettre sous la forme : $r = \frac{p}{1-ecos\theta}$ où e est la norme de $\vec{e}$.
En déduire la trajectoire du satellite.

C Trajectoire d'Hipparcos

1) Exprimer et calculer e et p en fonction de h, H et R.
2) Exprimer et calculer le demi-grand axe a de la trajectoire.

D Période d'Hipparcos

1) Énoncer sans démonstration la troisième loi de Képler.
2) Exprimer la période T_h de révolution d'Hipparcos en fonction de T, R, H et h. Calculer T_h en heure.

E Ceinture de Van Hallen

1) Déterminer les valeurs numériques des angles θ_1, θ_2 d'entrée et de sortie de la ceinture de Van Hallen du satellite.
On donnera les valeurs comprises entre 0° et 180°.
2) Représenter sur un schéma clair la trajectoire du satellite et l'aire A balayée par $\overrightarrow{OS}$ lors d'un passage dans la ceinture de Van Hallen.
Pour la question suivante, on prendra une valeur approchée de $A = 200.10^6$ km^2.
3) Déterminer le rapport $\rho = t_o/T_h$ en fonction de A et A_e (aire de l'ellipse) où t_o est la durée totale d'inactivité d'Hipparcos sur une période. Commenter.
On donne l'aire de l'ellipse : $A_e = \frac{\pi p^2}{(1-e^2)^{3/2}}$.

Réponse : $e = \frac{H-h}{2R+H+h}$; $p = 2\frac{(R+h)(R+H)}{2R+H+h}$; $a = R + \frac{H+h}{2}$; $T_h = T\left(\frac{R+\frac{H+h}{2}}{R+H}\right)^{3/2}$; $\rho = 2\frac{A}{A_e}$.

III Interaction nucléaire entre proton et neutron

Dans la théorie de Yukawa sur les forces nucléaires, l'interaction attractive entre un neutron et un proton est caractérisée par l'énergie potentielle suivante, fonction de la distance r qui sépare les deux particules :

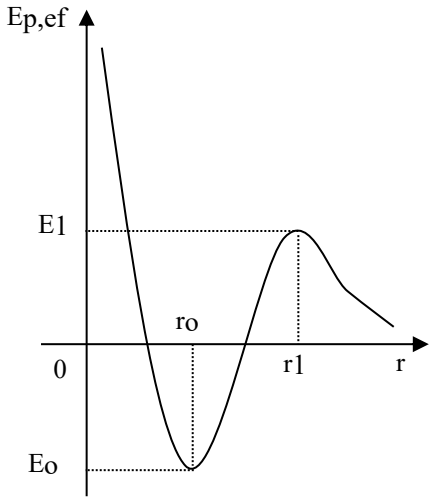
$$E_p(r) = \frac{K}{r}e^{-r/a}$$

a étant une distance caractéristique et K une constante négative d'interaction.

1) Donner l'expression de la force correspondante.

2) Donner l'expression de l'énergie potentielle effective $E_{p,ef}$ en fonction de la masse μ du système et de son moment cinétique L dans le référentiel du centre de masse. Le graphe $E_{p,ef}(r)$ a l'allure représentée sur la figure ci-contre. Discuter les différents mouvements possibles suivant la valeur de l'énergie $E = E_c + E_p$. Quelle est l'équation qui relie les constantes L, a, μ, K à la valeur r_m pour laquelle la dérivée $dE_{p,ef}/dr$ est nulle ?

3) Calculer le moment cinétique L et l'énergie E dans le cas d'un mouvement circulaire de rayon r_o.



Réponse : $\vec{F} = \frac{K}{r^2}\left(1+\frac{r}{a}\right)e^{-r/a}\vec{e}_r$; $E_{p,ef} = \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu r^2} + E_p$; $K\left(1+\frac{r_m}{a}\right)e^{-r_m/a} + \frac{L^2}{\mu r_m} = 0$; $E_0 = \frac{K}{2r_0}\left(1-\frac{r_0}{a}\right)e^{-r_0/a}$;
$L_0 = \pm\sqrt{-\mu K r_0\left(1+\frac{r_0}{a}\right)e^{-r_0/a}}$.

IV Mouvement dans un champ newtonien - Théorème du viriel

Le théorème du viriel affirme en particulier que si un point matériel M(x, y, z) possède une énergie potentielle $E_p(x, y, z)$ vérifiant la propriété $E_p(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^k.E_p(x, y, z)$ pour tout λ réel, alors il existe la relation $k<E_p> = 2<E_C>$ entre les valeurs moyennes temporelles au cours du mouvement de M à condition que la trajectoire soit bornée ; E_C désigne l'énergie cinétique de M et <f> la valeur moyenne de f(t) au cours du temps.
Nous ne considérerons que des mouvements périodiques donc les moyennes seront calculées sur une période.
Dans tout le problème, l'étude est faite dans un référentiel galiléen (R) auquel est associé un repère orthonormé (O, x, y, z).

On considère un satellite de masse m se trouvant à une distance r du centre O de la Terre. On note G la constante de gravitation, M_t la masse de la Terre et r la distance entre O et le satellite.

1)
a) Comment s'écrit la force subie par le satellite ?
b) Déterminer l'énergie potentielle E_p du satellite (avec la convention $E_p = 0$ à l'infini).
c) Comment s'exprime ici le théorème du viriel ? Quelle propriété de l'énergie retrouve-t-on pour un état lié ?
d) Dans le cas où la trajectoire du satellite est circulaire de rayon r_0, déterminer sa vitesse v_C.

Pour la suite, le satellite est lancé à une distance r_0, avec une vitesse orthoradiale (orthogonale au rayon vecteur) de module $v_0 = \alpha\sqrt{\frac{GM_t}{r_0}}$ avec $1 < \alpha < \sqrt{2}$.

2)
a) Montrer que le mouvement est plan. Celui-ci est repéré en coordonnées polaires (r, θ) dans son plan ; montrer que la quantité $r^2\dot{\theta}$ est constante. Déterminer la valeur de cette constante que l'on notera C.
b) Montrer que la trajectoire est bornée.
c) Montrer que l'équation polaire de la trajectoire peut s'écrire $r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$ avec $p = \frac{C'}{GM_T}$ où C' est une constante que l'on déterminera. On donne la deuxième formule de Binet : $\vec{\gamma} = -\frac{C^2}{r^2}\left[\frac{1}{r} + \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\vec{e}_r$.
En outre, il est rappelé que dans le cas d'une trajectoire elliptique l'énergie mécanique vaut $E = -\frac{GM_Tm}{2a}$ avec a le demi-grand axe.
d) Déterminer le paramètre p de la trajectoire du satellite en fonction de r_0.
e) Déterminer l'excentricité de la trajectoire en fonction de α seulement.
f) Calculer les rayons au périgée et à l'apogée. Représenter la trajectoire en précisant le point départ, l'axe polaire, les foyers.

3)
a) Exprimer l'énergie cinétique du satellite en fonction de G, m, M_t, p, e et θ.
b) Exprimer de même l'énergie potentielle E_p en fonction de G, m, M_t, p, e et θ.
c) Déduire du théorème du viriel que <cosθ> = - e. Ce résultat vous surprend-t-il ? Que pensez-vous de <sinθ> ?

4) Pour mieux cerner le résultat précédent on cherche à évaluer les durées de passage du satellite Δt_1 pour un angle θ passant de -π/2 à π/2 et Δt_2 pour un angle θ passant de π/2 à 3π/2.
a) On rappelle la troisième loi de Kepler $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$; exprimer la période T en fonction de p, C et e.
b) Exprimer la durée Δt que met le satellite pour passer d'un angle polaire θ_1 à θ_2 ; on donnera le résultat en fonction de la période et d'une intégrale sans dimension.
Si e = 0,5, le calcul numérique donne le résultat suivant : $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2} = 1{,}89$.
Ce résultat est-il en accord avec celui obtenu au 3) c) ?

Réponse : $\vec{F} = -\frac{GmM_t}{r^2}\frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$; $E_p = -\frac{GmM_t}{r}$; <E><0 ; $v_C = \sqrt{\frac{GM_t}{r_0}}$; $C = \alpha\sqrt{GM_tr_0}$; $C' = C^2$; $p = \alpha^2 r_0$; $e = \alpha^2 - 1$;
$r_A = \frac{\alpha^2 r_0}{2-\alpha^2}$; $r_P = r_0$; $E_c = \frac{GmM_t}{2p}(1 + e^2 + 2e\cos\theta)$; $E_p = -\frac{GmM_t}{2p}(1 + e\cos\theta)$; <sinθ> = 0 ; $T = \frac{2\pi p^2}{C(1-e^2)^{3/2}}$;
$\Delta t = \frac{T}{2\pi}(1-e^2)^{3/2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$.

V Lancement d'un satellite géostationnaire : ellipse de transfert

La Terre est à considérer comme un astre sphérique de centre O, de rayon R et de masse M. Le référentiel géocentrique est supposé galiléen. La Terre est animée par rapport à ce référentiel d'un mouvement de rotation uniforme de période T_1.

On désigne par g_0 l'intensité du champ de gravitation terrestre à la surface de la Terre.

On place un satellite (S) de masse m sur une orbite circulaire C_0 située dans le plan équatorial et d'altitude z faible devant R.

On considère que sur l'orbite C_0 le satellite est soumis au champ de pesanteur $\vec{g}_0$ identique à celui qui règne au niveau du sol.

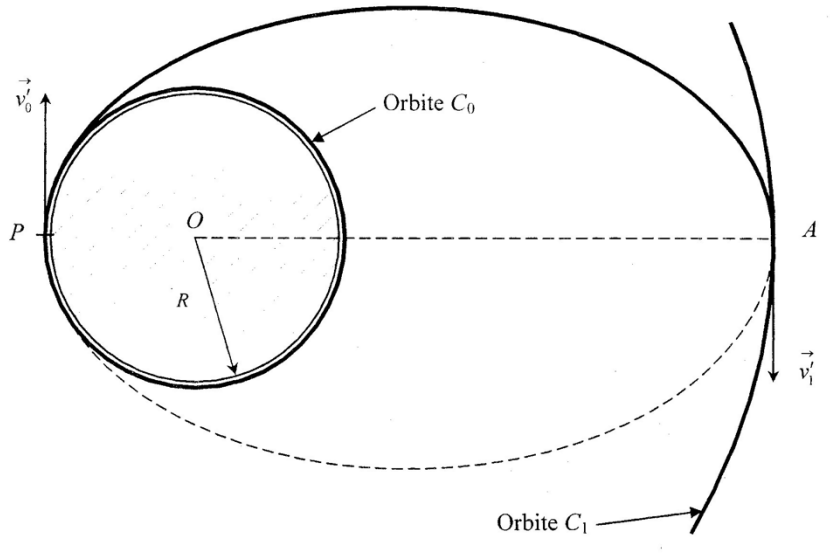
1) Déterminer la vitesse v_0 du satellite (S) en fonction de g_0 et R.

2) Exprimer la période T_0 du satellite (S) en fonction de g_0 et R.

3) Déterminer la vitesse v_E d'un point de l'équateur terrestre en fonction de R et T_1 ainsi que le rapport $(v_E/v_0)^2$.

4) Application numérique : Calculer le rapport $(v_E/v_0)^2$ pour R = 6400 km, g_0 = 9,81 m.s^{-2} et T_1 = 24 h.

Dans la suite du problème, on négligera v_E^2 devant v_0^2.



On place maintenant le satellite (S) sur une nouvelle orbite C_1 située dans le plan équatorial. On désire que (S) soit vu immobile de tout point de la surface terrestre.
On ne considère plus que z est très petit devant R.

5) Exprimer le champ de pesanteur g en fonction de g_0.

6) Déterminer le rayon R_1 de cette nouvelle orbite C_1. En déduire le rapport $x = R_1/R$.

7) Déterminer la vitesse v_1 du satellite (S) sur l'orbite C_1 en fonction de x et v_0.

8) Exprimer en fonction de $K_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$ et de x, l'énergie E nécessaire pour amener le satellite (S) sur l'orbite C_1 depuis la surface terrestre.

La mise en orbite géostationnaire du satellite (S) est réalisée de la manière suivante :

<u>Phase 1</u> : On lance le satellite (S) depuis la surface terrestre sur l'orbite C_0. On désigne par W_1 l'énergie nécessaire à cette opération.

<u>Phase 2</u> : En un point P de C_0, on communique au satellite (S) en un temps très bref une nouvelle vitesse v'_0 de manière à le placer sur une orbite elliptique tangente à C_1 au point A. On désigne par v'_1 la vitesse du satellite (S) à son arrivée au point A.

<u>Phase 3</u> : Au point A, on fait passer la vitesse du satellite (S) de v'_1 à v_1.

9) Exprimer E_1 l'énergie nécessaire à la phase 1 en fonction de K_0.

10) Déduire de l'énergie sur C_0 et sur la trajectoire parabolique la vitesse v'_0 en fonction de v_0 et de x.

11) Exprimer l'énergie E_2 nécessaire à la phase 2 en fonction de K_0 et de x.

12) Déterminer la vitesse v'_1 en fonction de v_0 et de x.

13) Exprimer l'énergie E3 nécessaire à la phase 3 en fonction de K0 et de x. Comparer l'énergie E calculée à la question 8) et la somme E1 + E2 + E3.

14) Déduire de la 3ème loi de Kepler la durée τ du transfert du satellite (S) de l'orbite C0 à l'orbite C1 en fonction de T1 et de x.

Réponse : $v_0 = \sqrt{g_0 R}$; $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g_0}}$; $v_E = \frac{2\pi R}{T_1}$; $\left(\frac{v_E}{v_0}\right)^2 = \frac{4\pi^2 R}{T_1^2 g_0}$; $g = g_0\left(\frac{R}{R+z}\right)^2$; $R_1 = \left(\frac{GMT_1^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$; $x = \left(\frac{v_0}{v_E}\right)^{2/3}$; $v_1 = \frac{v_0}{\sqrt{x}}$;
$E = K_0\left(2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right)$; $E_1 = K_0\left(1 - \frac{1}{x^3}\right)$; $v'_0 = v_0\sqrt{\frac{2x}{1+x}}$; $E_2 = K_0\frac{x-1}{x+1}$; $v'_1 = v_0\sqrt{\frac{2}{x(1+x)}}$; $E_3 = K_0\frac{x-1}{x(x+1)}$;
E = E1 + E2 + E3 ; $\tau = \frac{T_1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{3/2}$.

VI Satellisation.

Données : Masse de la Terre : $M_T = 5{,}97.10^{24}$ kg
Rayon de la Terre : $R_T = 6{,}37.10^{6}$ m
Jour sidéral : $T_{sid} = 86164$ s (période de rotation terrestre).
Constante de gravitation universelle : $G = 6{,}67.10^{-11}$ S.I.

1) *Champ de gravitation.*

On considère que la Terre de masse M_T et de rayon R_T a une répartition de masse à symétrie sphérique centrée en O.

a) Énoncer la loi de la gravitation universelle décrivant l'interaction de la Terre avec un objet de masse m et de position M situé à une distance r de son centre.

b) Le champ de gravitation, mesuré à la surface de la Terre, a pour module $g_0 = 9{,}81$ m.s^{-2}. Relier g_0 aux caractéristiques de la Terre (masse, rayon). Vérifier numériquement cette relation.

2) *Lancement d'un satellite*

On étudie le lancement d'un satellite artificiel à partir d'un point B de la surface terrestre (base de lancement).

a) Quel est le type de mouvement suivi par le point B dans le référentiel géocentrique avant le déclenchement du tir de la fusée ? Établir l'expression de la norme de la vitesse du point B dans le référentiel géocentrique Rg (assimilé ici à un référentiel galiléen) en fonction de la vitesse angulaire de rotation de la Terre autour de l'axe de ses pôles Ω, du rayon terrestre R_T et de la latitude du lieu λ. Évaluer cette vitesse sur l'équateur.
On rappelle que la latitude λ correspond à l'angle existant entre le plan équatorial et la droite (OB) passant par le centre O de la Terre et le point B considéré.

b) En déduire les conditions les plus favorables pour le lancement du satellite. Parmi les trois champs de tirs suivants, lequel choisir de préférence ? Baïkonour au Kazakhstan λ = 46° ; Cap Canaveral aux USA λ = 28,5° ; Kourou en Guyane française λ = 5,23°.

3) *Satellite artificiel en orbite circulaire*

On considère un satellite artificiel de masse $m = 4{,}0.10^{3}$ kg en mouvement circulaire autour de la Terre.

a) Montrer que le mouvement du satellite est uniforme. Établir l'expression de la vitesse du satellite en fonction du rayon orbital r.

b) Démontrer la troisième loi de Kepler liant la période de rotation T du satellite au rayon r de sa trajectoire.

c) Définir ce qu'est un satellite géostationnaire, en précisant en particulier les conditions imposées à son plan orbital. Calculer le rayon de l'orbite d'un satellite géostationnaire.

4) Mise sur orbite d'un satellite.

La mise en orbite terrestre d'un satellite de masse m = $4{,}0.10^3$ kg est réalisée en quatre étapes :

- phase de lancement : un lanceur place le satellite sur orbite circulaire basse ;
- phase de propulsion : l'action d'un second étage de propulsion, de brève durée, amène le satellite en phase balistique.
- phase balistique : le satellite s'éloigne de la Terre sur une ellipse dont l'un des foyers est situé au centre de la Terre, jusqu'à atteindre l'apogée ;
- phase de satellisation : le satellite modifie sa vitesse grâce à l'action d'un propulseur pour être placé finalement sur son orbite circulaire définitive.

a) Exprimer l'énergie mécanique du satellite en fonction de constante universelle de gravitation G, de la masse terrestre M_T, de la distance r entre le satellite et le centre de la Terre, de la masse m du satellite et du module de sa vitesse v.

b) Montrer que l'énergie mécanique s'écrit dans le cas d'une trajectoire circulaire de rayon r sous la forme : $E_m = -\frac{GM_Tm}{2r}$.

Évaluer numériquement l'énergie correspondant à une orbite basse de rayon r = $8{,}00.10^3$ km et celle correspondant à une orbite haute de rayon r = $40{,}0.10^3$ km.

c) Montrer que les trajectoires décrites par le satellite sont nécessairement planes. On suppose pour la suite que les trajectoires des différentes phases sont coplanaires.

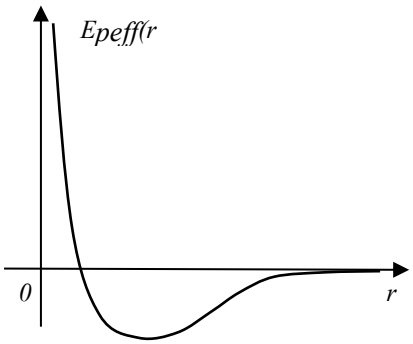
La suite de l'étude est conduite en coordonnée polaires (r, θ), la base cylindro-polaire étant notée $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

d) Expliciter la norme du moment cinétique L_O du satellite en fonction de r et θ.

e) Justifier que l'énergie mécanique se conserve durant la phase balistique. Montrer que l'énergie mécanique se met alors sous la forme : $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L_O^2}{2mr^2} - \frac{GM_Tm}{r}$

f) On définit l'énergie potentielle effective comme le terme : $E_{peff}(r) = E_m - \frac{1}{2}m\dot{r}^2$

On donne ci-contre une allure du graphe E_{peff} (r).



Reprendre ce graphe et indiquer les niveaux d'énergie mécanique E_{m1} et E_{m2} correspondant respectivement au cas d'une trajectoire circulaire et d'une trajectoire elliptique.
Justifier la réponse.

g) Pour atteindre de très hautes altitudes, le satellite est transféré d'une orbite circulaire basse (r_b = $8{,}00.10^3$ km) à d'une orbite circulaire haute (r_h = $40{,}0.10^3$ km) en passant lors de la phase balistique par une orbite de transfert elliptique. Schématiser ces orbites, sachant que le périgée P de l'orbite de transfert est situé sur l'orbite basse et que l'apogée A de l'orbite de transfert se trouve sur l'orbite haute.

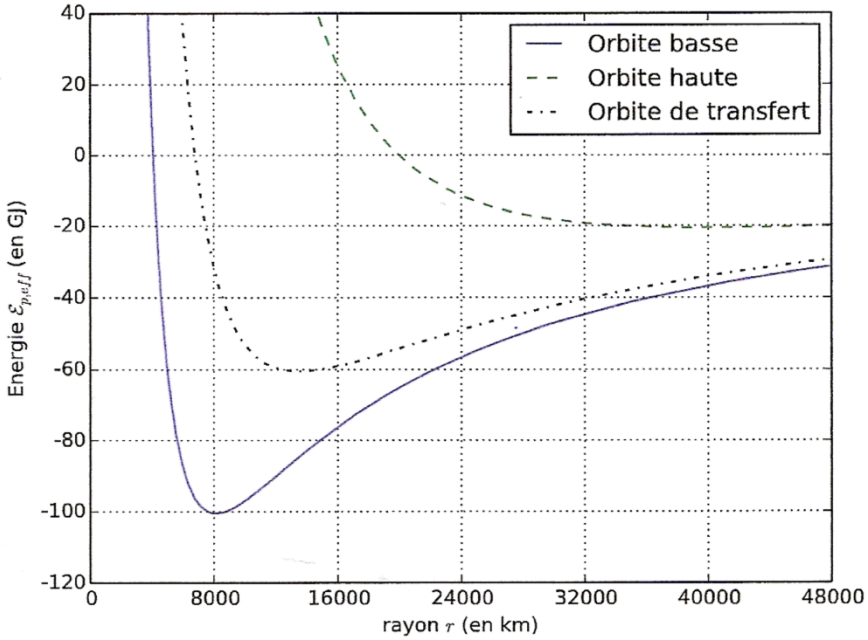
Le changement d'orbite s'effectue par de brutales variations de vitesse du satellite à l'aide des moteurs de propulsion. On cherche à évaluer l'énergie nécessaire à ces opérations.

h) On considère le mouvement sur l'orbite de transfert. Montrer à l'aide de la conservation de l'énergie mécanique que les valeurs r_b et r_h sont solution d'une équation du second degré de la forme : $r^2 + \alpha.r + \beta = 0$.

Exprimer α et β en fonction de G, M_T, m, L_O et E_m.

i) En remarquant que la somme des valeurs r_b et r_h est égale au grand axe de l'ellipse, noté 2a, montrer que l'énergie mécanique sur l'orbite de transfert répond à l'expression : $E_m = -\frac{GM_Tm}{2a}$.

j) On fournit ci-après un graphe présentant l'énergie potentielle effective en fonction du rayon r pour les trois orbites. Relever les valeurs d'énergie mécanique correspondant à ces trois orbites à partir de ce graphe, en justifiant la réponse.



k) La variation d'énergie mécanique nécessaire pour passer de l'orbite basse à l'orbite de transfert est obtenue par la combustion d'un mélange carburant-comburant (propergol) dont le pouvoir calorifique est d'environ 50 MJ.kg^{-1}. Déterminer la masse m_p de propergol nécessaire. Commenter.

5) Chute d'un satellite sur orbite basse.

Le frottement dans les hautes couches de l'atmosphère d'un satellite situé sur orbite basse l'amène inéluctablement à retomber sur Terre. La force de frottement est modélisée comme linéaire. Le frottement est supposé néanmoins suffisamment faible pour que la trajectoire du satellite reste quasiment circulaire. On obtient alors en quelque sorte une trajectoire circulaire « à rayon r(t) lentement variable ».

Dans ce cadre, l'expression de l'énergie mécanique reste de la forme : $E_m = -\frac{GM_Tm}{2r(t)}$

et l'étude du mouvement conduit à maintenir formellement la relation exprimant le carré de la vitesse : $v^2(t) = \frac{GM_T}{r(t)}$.

a) En exploitant le théorème de l'énergie mécanique, montrer que le rayon r(t) répond à l'équation : $\frac{dr}{dr} + \frac{1}{\tau}r(t) = 0$
où τ est une constante que l'on exprimera en fonction de k et m. Montrer que τ est bien homogène à un temps.

b) En déduire l'expression r(t). On supposera que le satellite est à l'instant t = 0 sur une orbite quasi-circulaire de rayon r_0. Tracer l'allure de r(t).

c) Pour une orbite initiale située à l'altitude de 800 km, on constate que le satellite descend de δ = 2,5 m par jour. Proposer une valeur numérique pour k et déterminer l'intensité de la force de frottement s'exerçant alors sur le satellite à cette altitude.

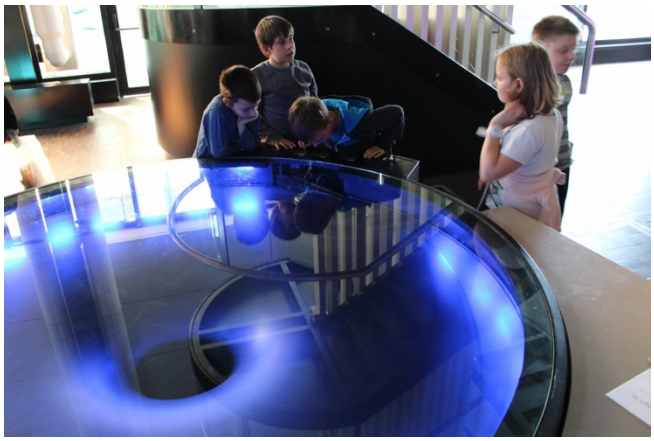
En pratique, les satellites peuvent être équipés de moteur permettant de relever régulièrement leur orbite.

Réponse : $\vec{F} = -\frac{GM_Tm}{r^2}\vec{u}_r$; $g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2}$; $v = \frac{2\pi R_T}{T_{sid}}cos\lambda$; $v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$; $\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM_T}{4\pi^2}$; $r = \left(\frac{GM_TT_{sid}^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = 4{,}14.10^7 m$;
$L_o = mr^2\dot{\theta}$; $\alpha = \frac{GM_Tm}{E_m}$ et $\beta = \frac{-L_o^2}{2mE_m}$; Emb = - 100 GJ ; Emt = - 36 GJ ; Emh = - 20 GJ ; mp = 1280 kg ; $\tau = \frac{m}{2k}$; $r(t) = r_0e^{-t/\tau}$;
k = 8,1.10^{-9} USI ; f = 0,45 N.

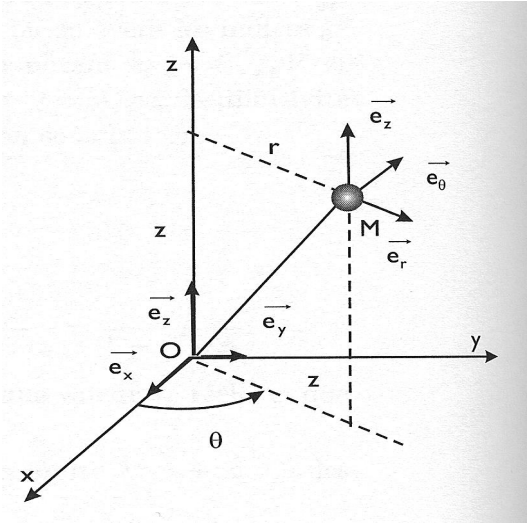
VII Cosmologie : orbitogramme de la Villette

C'est un élément assez célèbre à la Cité des sciences et de l'industrie située porte de la Villette à Paris. C'est un simulateur de mouvements de corps célestes constitué d'une bille se déplaçant sur une surface courbe avec une trajectoire qui va varier en fonction des conditions initiales.

Il provient en fait d'une autre exposition assez fondamentale qui s'appelle « Mathematica : A World of Numbers… and Beyond » et qui a été présentée au « California Museum of Science and Industry », en 1961.



1) Étude cinématique



On considère un référentiel galiléen associé au repère orthonormé $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, l'axe Oz est vertical ascendant. La position d'un point matériel M sera définie par ses coordonnées cylindriques, r (r > 0), θ et z.
On notera respectivement $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ les vecteurs unitaires déduits de $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ par rotation d'angle θ autour de 0z.

a) Exprimer $\overrightarrow{OM}$ dans la base cylindrique.

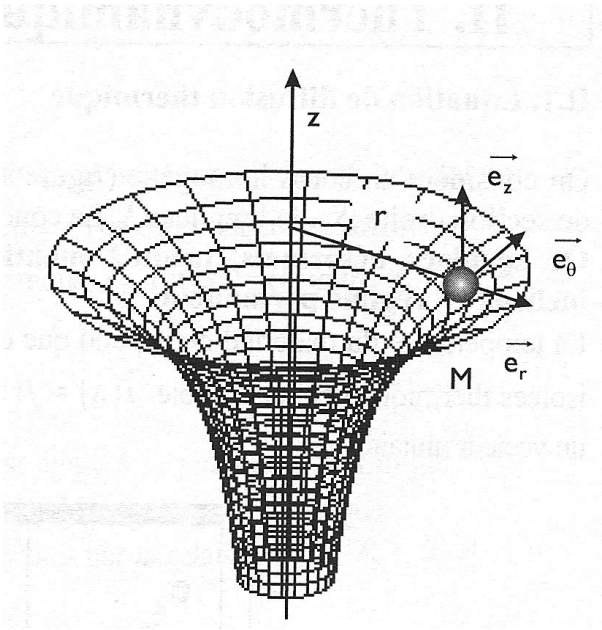
b) En déduire la vitesse $\vec{v}(M)$ dans cette même base.

c) Montrer que l'accélération peut se mettre sous la forme :

$$\vec{a}(M) = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z.$$

d) Montrer que $a_\theta = \vec{a}.\vec{e}_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)$.

2) Étude dynamique et énergétique



On étudie le mouvement d'une bille d'acier M, de masse m, assimilée à un point matériel sur une surface de révolution.
La surface sur laquelle roule la bille est engendrée par la révolution d'une portion d'hyperbole z = - k/r avec k > 0. La bille se comporte sur cette surface comme un corps céleste soumis à une force de gravitation.

a) Rappeler l'expression de la force de gravitation exercée par un point M1 de masse m1 sur un point M2 de masse m2.

On notera r = M1M2 la distance entre les points et $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{r}$ le vecteur unitaire orienté de M1 vers M2.

b) Montrer que cette force dérive d'une énergie potentielle dont on établira l'expression. On choisira l'origine de l'énergie potentielle lorsque r tend vers l'infini.

On revient à l'étude de la bille.
On néglige les frottements. La réaction normale du support sera notée :

$$\vec{R}_N = R_r\vec{e}_r + R_\theta\vec{e}_\theta + R_z\vec{e}_z.$$

c) Justifier sans calcul que Rθ = 0.

d) Faire le bilan des forces s'exerçant sur la bille. Préciser si ces forces dérivent d'une énergie potentielle. Dans l'affirmative, préciser l'expression de l'énergie potentielle associée en fonction de la variable r uniquement. On choisira l'origine de l'énergie potentielle lorsque r tend vers l'infini.

e) Écrire le principe fondamental de la dynamique et faire la projection dans la base cylindrique.
A l'aide des résultats de la question 1), en déduire que la quantité $r^2\dot{\theta}$ est une constante notée C.

f) Exprimer l'énergie mécanique sous la forme : $E_m = \frac{1}{2}m\alpha(r)\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{mgk}{r}$ avec α(r) > 0 à préciser en fonction de k et r. Que peut-on dire de l'énergie mécanique.

g) On peut donc définir une énergie potentielle effective $E_{peff} = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{mgk}{r}$. Tracer l'allure de la courbe $E_{peff}(r)$ (on rappelle que k est une constante positive).

En fonction de la valeur de l'énergie mécanique initiale du système E_O, discuter le caractère lié ou libre (état de diffusion) du mouvement.

h) Pour quelle valeur de r a-t-on un mouvement circulaire ? On exprimera le rayon r_C du mouvement circulaire en fonction de C, g et k.

i) On lance la bille d'une distance r_O avec une vitesse $\vec{v}_0$. Préciser la direction et le module de $\vec{v}_0$ pour avoir un mouvement circulaire.

Réponse : $E_p = -\frac{mgk}{r}$; $\alpha(r) = 1 + \frac{k^2}{r^4}$; $r_C = \frac{C^2}{gk}$; $v_C = \sqrt{\frac{gk}{r_0}}$.

VIII Exoplanètes

Une exoplanète est une planète tournant autour d'une étoile autre que notre soleil, c'est-à-dire une planète n'étant pas dans notre système solaire.

On rappelle que le centre de masse G de deux points A (masse mA) et B (masse mB) est défini par l'une des deux relations :

$$(m_A + m_B)\overrightarrow{OG} = m_A\overrightarrow{OA} + m_B\overrightarrow{OB} \text{ pour tout point O}$$
$$m_A\overrightarrow{GA} + m_B\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

On rappelle l'équation polaire d'une ellipse : $r(\theta) = \frac{p}{1+e\cos\theta}$
où e est son excentricité et p son paramètre, r est la norme du vecteur position avec origine au foyer et θ l'angle entre le vecteur position et l'axe focal avec origine θ = 0 au périhélie.

Partie A : Caractéristiques orbitales de planètes extra-solaires

La première planète extra-solaire a été détectée en 1995 par l'équipe de l'astronome Michel Mayor. Cette première planète extrasolaire orbite autour d'une étoile de la séquence principale, 51 Peg. Cependant, il faut noter que les 334 exoplanètes découvertes hors de notre système solaire entre 1995 et le début de 2009 n'ont pas été observées comme telles mais elles furent détectées par les perturbations qu'elles provoquent sur leur étoile. Mais ces planètes sont pour la plupart gigantesques, de type jovienne, et on n'en a pas encore trouvées de semblable à la Terre. De plus, il existe d'autres étoiles qui sont entourées d'un disque de poussière qui pourrait être un système planétaire en formation.

On s'intéresse tout spécialement au cas de l'étoile 51 Peg (Peg pour Pegasi car dans la constellation de Pégase), vraisemblablement accompagnée d'une planète orbitant en 4 jours. Cette étoile est de type solaire. Par ailleurs, une planète est dite tellurique si elle est analogue en masse et en composition à la Terre ; elle est dite géante si elle est comparable à Jupiter.
Parmi les 334 planètes découvertes hors de notre système solaire entre 1995 et le début de 2009, il y en a trois qui semblent être différentes. Leur masse est comprise entre 7 et 20 fois celle de la Terre, ce qui en fait de très petites exoplanètes. Et elles seraient les premières planètes rocheuses découvertes jusqu'à aujourd'hui. La pesanteur sur ces exoplanètes serait trois fois plus importante que sur la Terre. Les étoiles qui abritent ces trois spécimens sont relativement près de nous. L'étoile 55 Can ε se trouve à 43, 6 a.l. (années lumières), Gliese 436 β à 33, 2 a.l. et Mu Arae δ à 50 a.l. Deux de ces étoiles sont de type spectral G, c'est-à-dire semblables à notre Soleil. Mais pour l'instant il est impossible d'observer visuellement la surface de ces planètes.

Le système constitué par une étoile et sa planète est considéré comme isolé.

Données numériques :

Constante de gravitation : $G = 6,67.10^{-11}$ $kg^{-1}.m^3.s^{-2}$

Masse du Soleil : $M_S = 2,0.10^{30}$ kg

Masse de la Terre : $M_T = 6,0.10^{24}$ kg

Masse de Jupiter : $M_J = 2,0.10^{27}$ kg

Distance Terre-Soleil : $1uA = 1,5.10^{11}$ m

Rayon du Soleil : $R_S = 7,0.10^{8}$ m

Rayon de la Terre : $R_T = 6,4.10^{6}$ m

Rayon de Jupiter : $R_J = 7,1.10^{7}$ m

L'unité astronomique (uA) est égale par définition au demi-grand axe de l'orbite terrestre.

1)

a) Rappeler l'expression de la force d'interaction gravitationnelle entre la planète P et son étoile E, de masse respectives m et M assimilées à des points matériels. Rappeler l'expression de l'énergie potentielle Ep(r) correspondante en prenant Ep(∞) = 0. On posera $\overrightarrow{EP} = r\vec{e}_r$ où $\vec{e}_r$ est un vecteur unitaire.

b) Pourquoi le mouvement de P est-il plan ? Justifier précisément.

2) Dans un premier temps, on néglige la masse de la planète devant celle de son étoile.

a) Pour un mouvement circulaire de rayon a et de période T, déterminer la quantité $C = T^2/a^3$ et commenter le résultat.

b) En déduire que le rapport des deux valeurs de C pour deux étoiles différentes est déterminé par le rapport des masses de ces deux étoiles.

Quel est alors le rayon de la trajectoire circulaire d'une planète orbitant en 4 jours autour de l'étoile 51 Peg dont on supposera les caractéristiques physiques identiques à celles du Soleil ?

3) Toujours en négligeant la masses de la planète devant celle de l'étoile, on s'intéresse à une orbite elliptique, de demi-grand axe a et d'excentricité e ; on rappelle que l'excentricité d'une ellipse est le rapport c/a où c représente dans cette question la distance d'un des foyers au centre.

a) Soient v_m et v_M les valeurs minimale et maximale de la vitesse de la planète sur son orbite.

Pour quels points caractéristiques de cette orbite sont-elles obtenues ? En préciser les distances respectives r_m et r_M à l'étoile en fonction de a et c.

b) Déterminer le rapport v_m/v_M en fonction de e.

c) A l'aide de la conservation de l'énergie mécanique, obtenir indépendamment de ce qui précède une expression reliant v_m, v_M, a, e et les paramètres du système. Déterminer alors v_M en fonction de a, e, M et G.

d) Soit v_0 la vitesse qu'aurait la planète sur une orbite circulaire de rayon a. Déterminer v_M/v_0 en fonction de e. Calculer ce rapport pour e = 0,67 (cas du candidat exoplanète 16 CygB).

4) On tient compte maintenant du rapport des masses de la planète et de l'étoile tout en supposant m << M. On s'intéresse comme annoncé à l'exoplanète 51−PegasiB d'excentricité e = 0,014 (trajectoire quasi circulaire) et de période de rotation très petite (4,2 jours) comparée aux périodes de rotation des planètes du système solaire.

On supposer que les résultats obtenus dans les questions précédentes sont toujours valables en première approximation.

a) Définir la position du barycentre O du système étoile-planète.

En supposant O fixe, trouver la relation entre les vitesses V de l'étoile et v de la planète.

b) En utilisant notamment la troisième loi de Képler, exprimer, pour une orbite circulaire, V en fonction de m, M, G et de la période T du mouvement.

c) D'après les observations, les plus courtes périodes mesurées sont de 4 jours. Calculer pour une vitesse V de 60 $m.s^{-1}$ la masse m de la planète. On rappelle que l'étoile considérée est de type solaire.

Peut-il s'agir d'une planète de type tellurique ou de type géante ?

d) Dans le cas d'une orbite tellurique (dont le demi-grand axe est de l'ordre de celui de l'orbite terrestre) de période T de l'ordre de 4 jours, calculer m pour e = 0,67 et $V_M = 10$ $m.s^{-1}$ où V_M est la vitesse maximale de l'étoile. On supposera que la relation entre T et a obtenue en 2) a) est toujours valable pour une orbite elliptique de demi-grand axe a. On rappelle que l'étoile considérée est de type solaire.

Partie B : Proxima Centauri b

Données :

- Constante universelle de la gravitation G = $6{,}674.10^{-11}$ $m^3.kg^{-1}.s^{-2}$
- Masse de la Terre MT = $5{,}97.10^{24}$ kg

Le 24 août 2016, l'observatoire européen austral annonce en conférence de presse la découverte de Proxima Centauri b, une planète « super Terre » rocheuse de masse MP d'environ 1,3 masse terrestre, en orbite à une distance de 7 millions de kilomètres de Proxima Centauri (soit dans la zone habitable). Cette exoplanète a été détectée, de manière indirecte, par la méthode des vitesses radiales.

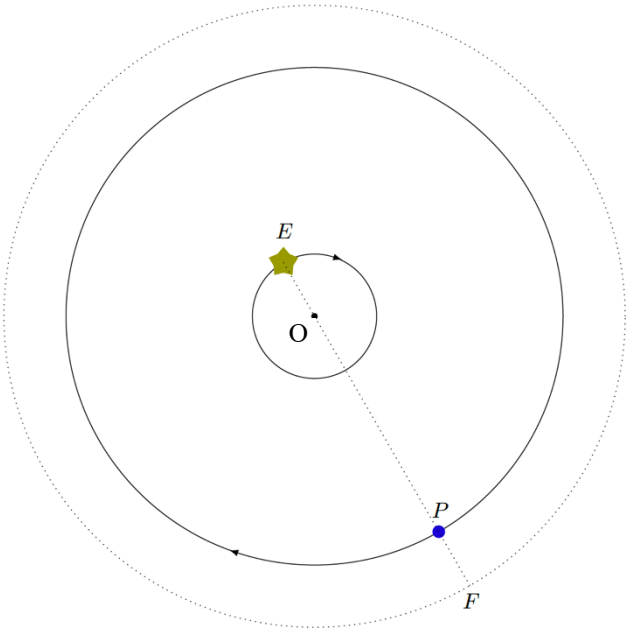


Figure 1 Schéma représentant l'étoile E et la planète P en rotation autour du point O, centre de masse du système {étoile + planète} ; le point F est un point utilisé pour étudier le mouvement de E et P autour de O

B1 – Étude du mouvement du système {étoile + planète}

La détection de la planète repose sur le fait que le centre de masse O du système {étoile + planète} n'est pas confondu avec le centre de l'étoile. L'étoile E et la planète P tournent toutes les deux autour du centre de masse O du système complet (figure 1).
Toutes les forces autres que la force d'interaction gravitationnelle entre la planète et l'étoile sont négligées. On suppose que le référentiel d'étude, de centre O dont les 3 axes pointent vers trois étoiles lointaines est galiléen.

1) Établir la relation $\overrightarrow{OP} = \frac{M_E}{M_E+M_P}\overrightarrow{EP}$. Contrôler la pertinence de cette expression en étudiant des cas limites.

On note pour la suite $\vec{r} = \overrightarrow{EP}$ et $\|\vec{r}\| = r$.

2) En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la planète P dans le référentiel d'étude, établir l'équation différentielle vérifiée par $\vec{r}$.

On considère le point F défini par $\vec{r} = \overrightarrow{OF}$. L'étude de ce point, appelé mobile fictif et sans existence réelle, remplace avantageusement celle précédente portant sur les deux points E et P.
Ce point est en mouvement circulaire, de période T, autour de O (figure 1).

3) Établir la relation

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{G(M_E+M_P)}{4\pi^2}.$$

Quel nom porte cette loi ?

4) Justifier que l'étoile E a un mouvement circulaire uniforme autour de O et établir l'expression de sa vitesse de révolution en fonction de MP, ME, r et T.

B2 – Résultats ayant conduit à la découverte de la planète Proxima Centauri b

Dans le cas le plus favorable à l'observation, la Terre est dans le plan des trajectoires de E et P (figure 1), l'étoile E possède alors un mouvement apparent oscillant et la mesure de sa composante V de vitesse selon l'axe de visée depuis la Terre est possible par effet Doppler-Fizeau, qui entraine un décalage des raies spectrales de l'étoile par rapport à leur position mesurée sur Terre, selon la relation

$$\frac{f_{obs} - f_{em}}{f_{em}} = \frac{V}{c}$$

où $f$em et $f$obs représentent respectivement la fréquence à l'émission et la fréquence observée sur Terre.
Le professeur Bouchy de l'observatoire astronomique de Provence propose, en 2005, dans son intervention sur les exoplanètes la formule suivante pour la valeur maximale du décalage Doppler lors de la détection indirecte d'exoplanètes par la méthode des vitesses radiales

$$\frac{f_{obs} - f_{em}}{f_{em}} = -\left(\frac{2\pi G}{T}\right)^{1/3} \frac{M_P sini}{(M_P + M_E)^{2/3}} \frac{1}{c\sqrt{1-e^2}}$$

où MP et ME sont respectivement les masses de la planète et de l'étoile, T la période de la planète, e l'excentricité de l'orbite et i l'angle entre la ligne de visée et la perpendiculaire au plan orbital du système. L'excentricité e vérifie $0 \leqslant e < 1$, avec $e = 0$ pour une orbite circulaire.

5) En utilisant les résultats de la partie B1 précédente, établir une formule analogue à la formule proposée par le professeur Bouchy. Commenter les différences.

6) Connaissant la masse de Proxima Centauri, $ME = 2{,}44.10^{29}$ kg déterminée grâce à l'analyse de son rayonnement, exploiter les données expérimentales de la figure 2 pour déterminer la masse de la planète Proxima Centauri b. Comparer à la masse de la Terre.

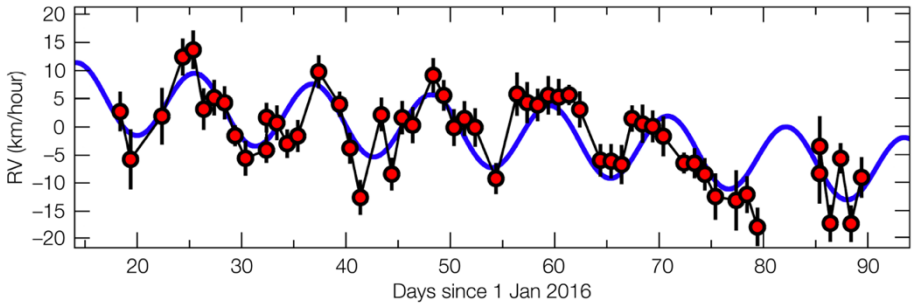


Figure 2 Variations de la vitesse radiale de l'étoile Proxima Centauri au cours du premier trimestre 2016 — Source : European Southern Observatory, Guillem Anglada-Escudé

Réponse : $C = \frac{4\pi^2}{GM}$; $7{,}4.10^9$ m ; rM = a – c ; rm = a + c ; vm/vM = rM/rm = (1 – e)/(1+ e) ; $v_M^2 - v_m^2 = 2GM\frac{2a}{a(1-e^2)}$;
$v_M = \sqrt{\frac{GM}{a}}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$; $\frac{v_M}{v_0} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = 2{,}2$; $M\vec{V} + m\vec{v} = \vec{0}$; $V = \frac{m}{M}\left(\frac{2\pi GM}{T}\right)^{1/3}$; $m = M_S V\left(\frac{T}{2\pi G M_S}\right)^{1/3} = 8{,}9.10^{26} kg$;
$m = \frac{M_S V_M}{\sqrt{GM}}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\left(\frac{GM_S T^2}{4\pi^2}\right)^{1/6} = 6{,}6.10^{25} kg.$
$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -G(M_E + M_P)\frac{\vec{r}}{r^3}$; $v_E = \frac{M_P}{M_E+M_P}\frac{2\pi}{T}r$; $\frac{f_{obs}-f_{em}}{f_{em}} = -\left(\frac{2\pi G}{T}\right)^{1/3}\frac{M_P}{(M_P+M_E)^{2/3}}\frac{1}{c}$; MP = 10^{25} kg avec T = 80 j et V = 2 m.s^{-1}.

IX Durée de visibilité de la comète de Halley.

On note ua l'unité astronomique, correspondant au rayon moyen de l'orbite terrestre.

La comète de Halley (désignation officielle 1P/Halley) est la plus connue de toutes les comètes. Son existence a été décrite depuis l'antiquité.

A Mouvement de la Terre

On suppose ici que la Terre, de masse M_T, décrit une orbite exactement circulaire autour du Soleil de masse M_S. On note r le rayon de sa trajectoire dans le référentiel héliocentrique ; ce rayon est de 149 millions de kilomètres.

1. Rappeler l'expression de la force de gravitation exercée par le Soleil sur la Terre et en déduire l'expression de la vitesse de la Terre sur son orbite.

2. 2.1 Démontrer la troisième loi de Kepler dans le cadre de ce mouvement circulaire.
   2.2 On donne la constante universelle de gravitation $G = 6{,}67.10^{-11}$ u.s.i. ainsi que la valeur de la masse solaire $M_S = 2{,}0.10^{30}$ kg. Déterminer la période de révolution terrestre.
   2.3 Comment doit on adapter l'expression de la troisième loi de Kepler dans le cas d'une orbite elliptique ?

B Mouvement de la comète de Halley

L'interaction de cette comète avec d'autres astres (planètes solaires…) est complètement négligeable. La comète étudiée suit une trajectoire elliptique de grande excentricité autour du Soleil, dans le référentiel héliocentrique.

Son demi grand axe a est de 17,98 ua (soit environ 2,7 milliards de kilomètres, 1 ua = $1{,}496.10^{11}$ m), son excentricité est de 0,967 et sa période est d'environ 76 années terrestres.

Sa distance au périhélie est de 0,59 ua et sa distance à l'aphélie est de 35,37 ua ; il s'agit d'une comète à courte période.

1. La trajectoire de cette comète est décrite par l'équation polaire $r(\theta) = p/(1 + e.\cos(\theta))$ où e est l'excentricité et p est le paramètre de la trajectoire. Déterminer la valeur de p à partir des informations précédentes.

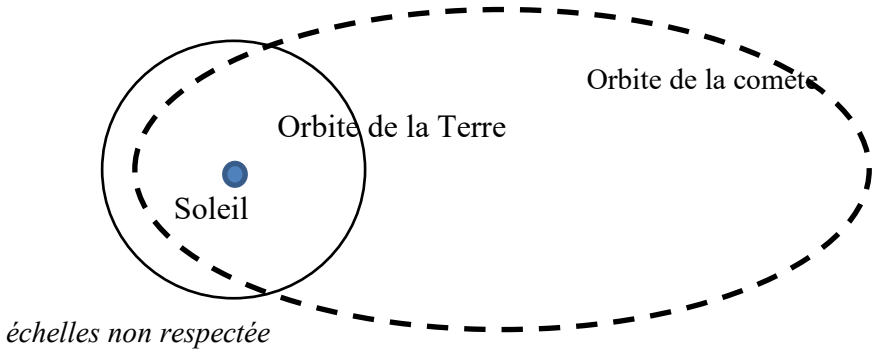
2. On donne la constante universelle de gravitation $G = 6{,}67.10^{-11}$ u.s.i. Déduire des informations précédentes la masse du Soleil M_S.

On donne l'expression de la surface d'une ellipse de demi-grand axe a et d'excentricité e :

$$S = \pi a^2\sqrt{1-e^2}$$

3. Montrer que le mouvement de la comète dans le référentiel héliocentrique respecte la loi des aires. Expliquer comment on peut déduire des données les caractéristiques orbitales suivantes :
   vitesse au périhélie : 54,5 km·s^{-1} ; vitesse à l'aphélie : 910 m·s^{-1}.

4. On veut déterminer la durée de visibilité de la comète depuis la Terre. On définit cette durée comme l'intervalle de temps pendant lequel la trajectoire de la comète est située à l'intérieur de l'orbite terrestre. Les orbites de la Terre et de la comète sont supposées coplanaires. L'orbite terrestre est supposée circulaire, de rayon r = 1 ua.



4.1 Déterminer l'expression littérale des valeurs θ_o et $-\theta_o$ d'angle polaire délimitant la partie de trajectoire correspondant au problème. Calculer numériquement θ_o.

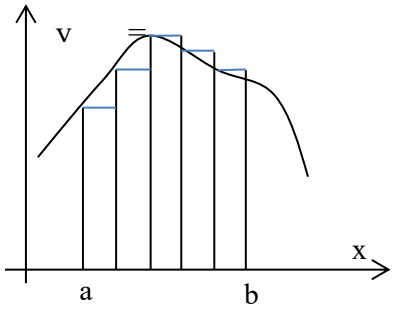
4.2 On veut maintenant évaluer numériquement la durée de visibilité.
4.21 Le mouvement de la comète respecte la loi des aires, qui peut s'exprimer par la relation :
$C = r^2.d\theta/dt$ où C est la constante des aires, que l'on explicitera en fonction des données.
En exploitant cette relation, établir que la durée de visibilité est donnée par l'intégrale :

$$\Delta t = A.\int_{-\theta_o}^{\theta_o} \frac{1}{(1+e.\cos(\theta))^2} d\theta$$

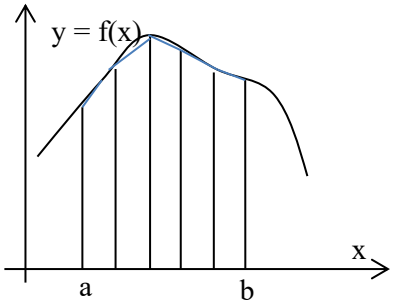
où l'on identifiera la quantité A, que l'on calculera numériquement.

4.22 Le calcul de l'intégrale précédente est envisagé au moyen de la *méthode des rectangles*. On rappelle que cette méthode consiste à remplacer la fonction à intégrer par une fonction continue par intervalles, ceux-ci étant de largeurs égales et formant une partition de l'intervalle d'intégration (voir figure ci-après).

Rédiger un programme mettant en œuvre cette méthode numérique, avec un pas correspondant au centième de l'intervalle d'intégration.



méthode des rectangles



méthode des trapèzes

4.23 Reprendre le calcul par la *méthode des trapèzes*. Cette méthode est dérivée de la précédente, mais on approche cette fois le graphe de la fonction à intégrer par une succession de segments de droites dont les extrémités s'appuient sur les points de coordonnées (x_i, $f(x_i)$) situés aux limites des intervalles formant une partition de l'intervalle d'intégration.

Comment le programme précédent doit-il être modifié ? Quel est l'intérêt de cette méthode par rapport à la méthode des rectangles ?

4.24 Le calcul numérique de : $I = \int_{-\theta_o}^{\theta_o} \frac{1}{(1+e.\cos(\theta))^2} d\theta$ amène pour valeur de cette intégrale I = 1,06. Donner la valeur numérique de la durée de visibilité Δt en secondes et en jours terrestres. Sur quelle proportion de sa période orbitale, en pourcent, la comète est-elle considérée comme visible ?

Réponse : $T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM_S}} r^{3/2} = 365 jours$; p = r_p (1+e) = 1,16 ua ; $M_S = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2} = 2,0.10^{30} kg$; $v_p = \frac{2\pi a}{T}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$ et $v_a = \frac{2\pi a}{T}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$;
$\theta_o = arccos\frac{1}{e}\left(\frac{p}{r} - 1\right) = 80°$; $A = \frac{p^2}{C} = \frac{T}{4\pi}(1-e^2)^{3/2} = 0{,}2\ an$; Δt = 0,212 an ; 0,28%.