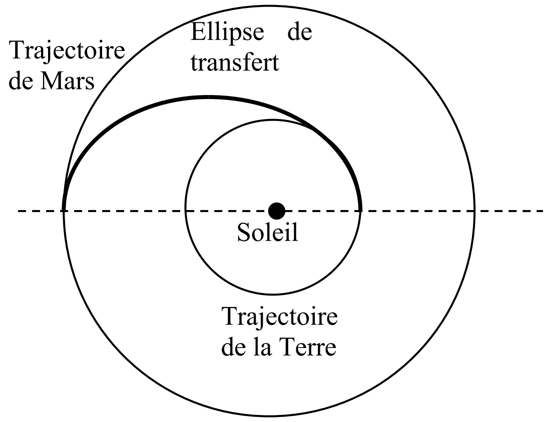
FORCES CENTRALES CONSERVATIVES

I Au cours d'un voyage interplanétaire, un vaisseau spatial de masse m = 1 t est transféré depuis la Terre jusqu'à la planète Mars. Ce transfert s'effectue suivant une orbite elliptique (ellipse d'Hohmann) tangente aux deux orbites coplanaires, pratiquement circulaires, de la Terre et de Mars, de rayons respectifs $R_1 = 1{,}5.10^8$ km et $R_2 = 2{,}3.10^8$ km, et dont le Soleil est un foyer. On négligera l'attraction exercée par les planètes sur le vaisseau et on ne considérera que l'attraction solaire.



On donne la masse du Soleil $M = 2.10^{30}$ kg ; constante de gravitation universelle $G = 6{,}67.10^{-11}$ S.I.

Déterminer en fonction de R_1, R_2, G et M, puis calculer numériquement :

1) l'excentricité e et le paramètre p de l'orbite de transfert d'Hohmann, et la constante des aires $C = \sqrt{pGM}$ de cette orbite ;
2) la durée T de ce voyage interplanétaire Terre-Mars ;
3) l'augmentation de vitesse qu'il faut communiquer au vaisseau
   a) lors du lancement depuis la terre ;
   b) lors de son arrivée sur la planète mars ;
4) la position relative angulaire que doit avoir la planète Mars par rapport à la Terre à l'instant où le vaisseau quitte la terre.

Réponse : $e = \frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1}$; $p = \frac{2R_1R_2}{R_1+R_2}$; $C = \sqrt{2GM\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}}$; $T = \frac{p}{\sqrt{GM}}\left(\frac{R_1+R_2}{2}\right)^{3/2}$;
$\Delta v_T = \sqrt{\frac{GM}{R_1}}\left(\sqrt{\frac{2R_2}{R_1+R_2}} - 1\right)$; $\Delta v_M = \sqrt{\frac{GM}{R_2}}\left(1 - \sqrt{\frac{2R_1}{R_1+R_2}}\right)$; 45°.

II Satellite Hipparcos

Le satellite Hipparcos lancé le 8 août 1987 était constitué principalement d'un télescope de 30 cm de diamètre. Celui-ci a permis d'établir un catalogue des positions, distances et éclats de plus de 118 000 étoiles avec une précision jamais atteinte.

Ce satellite devait être placé sur une orbite géostationnaire à une altitude H = 36 000 km. Un problème de mise à feu du moteur d'apogée a laissé Hipparcos sur son orbite de transfert, son altitude variant entre h et H. Après utilisation des moteurs de positionnement, l'altitude minimale a été portée à h = 500 km. Une programmation du satellite a permis de s'affranchir des problèmes liés à cette orbite.

Au cours d'une révolution, il passe dans la ceinture de Van Hallen. On supposera que cette ceinture est comprise entre deux sphères de rayon r_1 = 8 400 km et r_2 = 28 000 km et de centre celui de la Terre. La ceinture de Van Hallen est constituée de particules chargées piégées dans le champ magnétique terrestre. Ces particules aveuglent les détecteurs d'Hipparcos interrompant les mesures des positions des étoiles. Il est cependant utilisable à 65%.

On assimile la Terre à une sphère de centre O, de rayon R = 6 400 km et de masse M et le satellite à un point matériel (S, m). On suppose le référentiel géocentrique R_{gc} galiléen. La période de rotation de la Terre dans ce référentiel appelée jour sidéral vaut T = 86 164 s. On note G la constante de gravitation, sa valeur numérique n'est pas utile dans ce problème.

A Moment cinétique

1) Montrer que le moment cinétique $\vec{L}$ en O du satellite est une constante du mouvement.
2) On utilise les coordonnées cylindriques $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ avec $\vec{u}_z$ tel que $\vec{L} = L\vec{u}_z$.
   Montrer que le mouvement est plan et exprimer $r^2\dot{\theta}$ en fonction de L et m.
   Quelle est le nom de cette grandeur ?

B Vecteur excentricité

1) Montrer que $\vec{e} = \vec{u}_\theta - \frac{L}{GmM}\vec{V}$ est une constante du mouvement ($\vec{V}$ étant la vitesse du satellite).

2) On choisit l'origine de l'angle polaire pour avoir $\theta = (\vec{e}, \vec{u}_\theta)$.
Montrer que l'équation de la trajectoire peut se mettre sous la forme : $r = \frac{p}{1-e\cos\theta}$ où e est la norme de $\vec{e}$.
En déduire la trajectoire du satellite.

C **Trajectoire d'Hipparcos**

1) Exprimer et calculer e et p en fonction de h, H et R.
2) Exprimer et calculer le demi-grand axe a de la trajectoire.

D **Période d'Hipparcos**

1) Énoncer sans démonstration la troisième loi de Képler.
2) Exprimer la période T_h de révolution d'Hipparcos en fonction de T, R, H et h. Calculer T_h en heure.

E **Ceinture de Van Hallen**

1) Déterminer les valeurs numériques des angles θ_1, θ_2 d'entrée et de sortie de la ceinture de Van Hallen du satellite.
On donnera les valeurs comprises entre 0° et 180°.
2) Représenter sur un schéma clair la trajectoire du satellite et l'aire A balayée par $\overrightarrow{OS}$ lors d'un passage dans la ceinture de Van Hallen.
Pour la question suivante, on prendra une valeur approchée de A = 200.10^6 km^2.
3) Déterminer le rapport $\rho = t_o/T_h$ en fonction de A et A_e (aire de l'ellipse) où t_o est la durée totale d'inactivité d'Hipparcos sur une période. Commenter.
On donne l'aire de l'ellipse : $A_e = \frac{\pi p^2}{(1-e^2)^{3/2}}$.

Réponse : $e = \frac{H-h}{2R+H+h}$; $p = 2\frac{(R+h)(R+H)}{2R+H+h}$; $a = R + \frac{H+h}{2}$; $T_h = T\left(\frac{R+\frac{H+h}{2}}{R+H}\right)^{3/2}$; $\rho = 2\frac{A}{A_e}$.

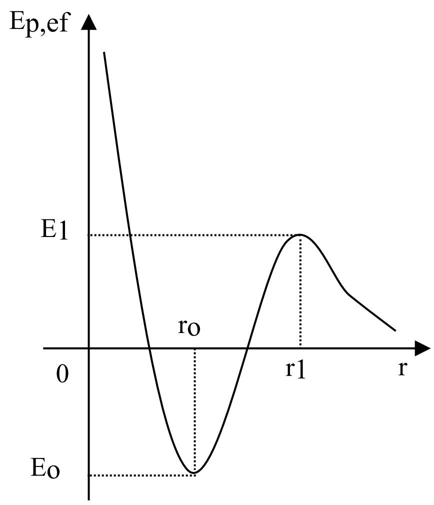
III Interaction nucléaire entre proton et neutron

Dans la théorie de Yukawa sur les forces nucléaires, l'interaction attractive entre un neutron et un proton est caractérisée par l'énergie potentielle suivante, fonction de la distance r qui sépare les deux particules :

$$E_p(r) = \frac{K}{r} e^{-r/a}$$

a étant une distance caractéristique et K une constante négative d'interaction.

1) Donner l'expression de la force correspondante.



2) Donner l'expression de l'énergie potentielle effective $E_{p,ef}$ en fonction de la masse μ du système et de son moment cinétique L dans le référentiel du centre de masse. Le graphe $E_{p,ef}(r)$ a l'allure représentée sur la figure ci-contre. Discuter les différents mouvements possibles suivant la valeur de l'énergie $E = E_c + E_p$. Quelle est l'équation qui relie les constantes L, a, μ, K à la valeur r_m pour laquelle la dérivée $dE_{p,ef}/dr$ est nulle ?
3) Calculer le moment cinétique L et l'énergie E dans le cas d'un mouvement circulaire de rayon r_o.

Réponse : $\vec{F} = \frac{K}{r^2}\left(1+\frac{r}{a}\right)e^{-r/a}\vec{e}_r$; $E_{p,ef} = \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu r^2} + E_p$; $K\left(1+\frac{r_m}{a}\right)e^{-r_m/a} + \frac{L^2}{\mu r_m} = 0$; $E_0 = \frac{K}{2r_0}\left(1-\frac{r_0}{a}\right)e^{-r_0/a}$;
$L_0 = \pm\sqrt{-\mu K r_0\left(1+\frac{r_0}{a}\right)e^{-r_0/a}}$.

IV Mouvement dans un champ newtonien - Théorème du viriel

Le théorème du viriel affirme en particulier que si un point matériel M(x, y, z) possède une énergie potentielle $E_p(x, y, z)$ vérifiant la propriété $E_p(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^k.E_p(x, y, z)$ pour tout λ réel, alors il existe la relation $k\langle E_p\rangle = 2\langle E_C\rangle$ entre les valeurs moyennes

temporelles au cours du mouvement de M à condition que la trajectoire soit bornée ; E_C désigne l'énergie cinétique de M et <f> la valeur moyenne de f(t) au cours du temps.
Nous ne considérerons que des mouvements périodiques donc les moyennes seront calculées sur une période.
Dans tout le problème, l'étude est faite dans un référentiel galiléen (R) auquel est associé un repère orthonormé (O, x, y, z).

On considère un satellite de masse m se trouvant à une distance r du centre O de la Terre. On note G la constante de gravitation, M_t la masse de la Terre et r la distance entre O et le satellite.

1)
a) Comment s'écrit la force subie par le satellite ?
b) Déterminer l'énergie potentielle E_p du satellite (avec la convention $E_p = 0$ à l'infini).
c) Comment s'exprime ici le théorème du viriel ? Quelle propriété de l'énergie retrouve-t-on pour un état lié ?
d) Dans le cas où la trajectoire du satellite est circulaire de rayon r_0, déterminer sa vitesse v_C.

Pour la suite, le satellite est lancé à une distance r_0, avec une vitesse orthoradiale (orthogonale au rayon vecteur) de module $v_0 = \alpha\sqrt{\frac{GM_t}{r_0}}$ avec $1 < \alpha < \sqrt{2}$.

2)
a) Montrer que le mouvement est plan. Celui-ci est repéré en coordonnées polaires (r, θ) dans son plan ; montrer que la quantité $r^2\dot{\theta}$ est constante. Déterminer la valeur de cette constante que l'on notera C.
b) Montrer que la trajectoire est bornée.
c) Montrer que l'équation polaire de la trajectoire peut s'écrire $r = \frac{p}{1+ecos\theta}$ avec $p = \frac{C'}{GM_T}$ où C' est une constante que l'on déterminera. On donne la deuxième formule de Binet : $\vec{\gamma} = -\frac{C^2}{r^2}\left[\frac{1}{r} + \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\vec{e}_r$.
En outre, il est rappelé que dans le cas d'une trajectoire elliptique l'énergie mécanique vaut $E = -\frac{GM_T m}{2a}$ avec a le demi-grand axe.
d) Déterminer le paramètre p de la trajectoire du satellite en fonction de r_0.
e) Déterminer l'excentricité de la trajectoire en fonction de α seulement.
f) Calculer les rayons au périgée et à l'apogée. Représenter la trajectoire en précisant le point départ, l'axe polaire, les foyers.

3)
a) Exprimer l'énergie cinétique du satellite en fonction de G, m, M_t, p, e et θ.
b) Exprimer de même l'énergie potentielle E_p en fonction de G, m, M_t, p, e et θ.
c) Déduire du théorème du viriel que <cosθ> = - e. Ce résultat vous surprend-t-il ? Que pensez-vous de <sinθ> ?

4) Pour mieux cerner le résultat précédent on cherche à évaluer les durées de passage du satellite Δt_1 pour un angle θ passant de -π/2 à π/2 et Δt_2 pour un angle θ passant de π/2 à 3π/2.
a) On rappelle la troisième loi de Kepler $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$; exprimer la période T en fonction de p, C et e.
b) Exprimer la durée Δt que met le satellite pour passer d'un angle polaire θ_1 à θ_2 ; on donnera le résultat en fonction de la période et d'une intégrale sans dimension.
Si e = 0,5, le calcul numérique donne le résultat suivant : $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{d\theta}{(1+ecos\theta)^2} = 1{,}89$.
Ce résultat est-il en accord avec celui obtenu au 3) c) ?

Réponse : $\vec{F} = -\frac{GmM_t}{r^2}\frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$; $E_p = -\frac{GmM_t}{r}$; <E><0 ; $v_C = \sqrt{\frac{GM_t}{r_0}}$; $C = \alpha\sqrt{GM_t r_0}$; C' = C^2 ; p = $\alpha^2 r_0$; e = $\alpha^2 - 1$;
$r_A = \frac{\alpha^2 r_0}{2-\alpha^2}$; $r_P = r_0$; $E_c = \frac{GmM_t}{2p}(1 + e^2 + 2ecos\theta)$; $E_p = -\frac{GmM_t}{2p}(1 + ecos\theta)$; <sinθ> = 0 ; $T = \frac{2\pi p^2}{C(1-e^2)^{3/2}}$;
$\Delta t = \frac{T}{2\pi}(1 - e^2)^{3/2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{d\theta}{(1+ecos\theta)^2}$.

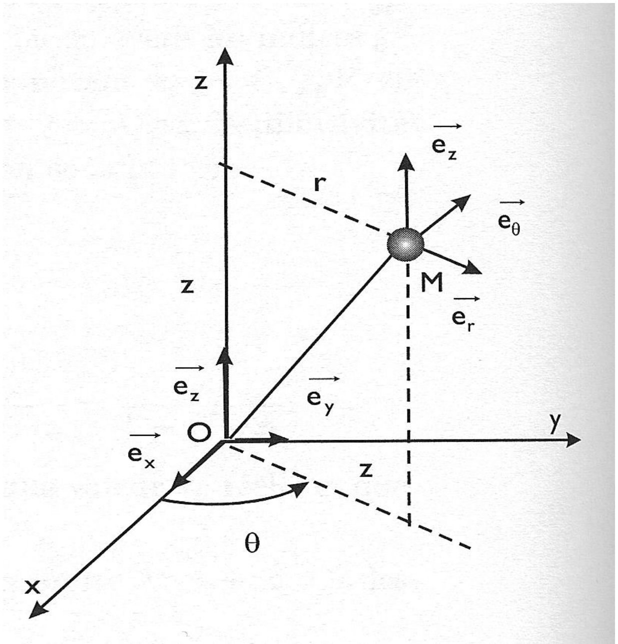
V Cosmologie : orbitogramme de la Villette

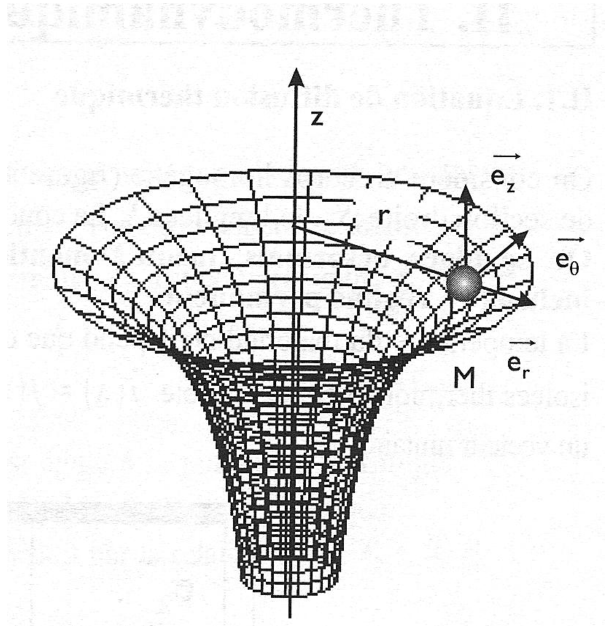
1) Étude cinématique

On considère un référentiel galiléen associé au repère orthonormé $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, l'axe Oz est vertical ascendant. La position d'un

point matériel M sera définie par ses coordonnées cylindriques, r (r > 0), θ et z.
On notera respectivement $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ les vecteurs unitaires déduits de $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ par rotation d'angle θ autour de 0z.

a) Exprimer $\overrightarrow{OM}$ dans la base cylindrique.
b) En déduire la vitesse $\vec{v}(M)$ dans cette même base.
c) Montrer que l'accélération peut se mettre sous la forme : $\vec{a}(M) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$.
d) Montrer que $\vec{a}.\vec{e}_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$.





2) Étude dynamique et énergétique
On étudie le mouvement d'une bille d'acier M, de masse m, assimilée à un point matériel sur une surface de révolution. La surface sur laquelle roule la bille est engendrée par la révolution d'une portion d'hyperbole z = - k/r avec k > 0. La bille se comporte sur cette surface comme un corps céleste soumis à une force de gravitation.

a) Rappeler l'expression de la force de gravitation exercée par un point M1 de masse m_1 sur un point M2 de masse m_2. On notera r = M1M2 la distance entre les points et $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{r}$ le vecteur unitaire orienté de M1 vers M2.
b) Montrer que cette force dérive d'une énergie potentielle dont on établira l'expression. On choisira l'origine de l'énergie potentielle lorsque r tend vers l'infini.

On revient à l'étude de la bille.
On néglige les frottements. La réaction normale du support sera notée : $\vec{R}_N = R_r\vec{e}_e + R_\theta\vec{e}_\theta + R_z\vec{e}_z$.

c) Justifier sans calcul que Rθ = 0.
d) Faire le bilan des forces s'exerçant sur la bille. Préciser si ces forces dérivent d'une énergie potentielle. Dans l'affirmative, préciser l'expression de l'énergie potentielle associée en fonction de la variable r uniquement. On choisira l'origine de l'énergie potentielle lorsque r tend vers l'infini.
e) Écrire le principe fondamental de la dynamique et faire la projection dans la base cylindrique. En déduire que la quantité $r^2\dot{\theta}$ est une constante notée C.
f) Exprimer l'énergie mécanique sous la forme : $E_m = \frac{1}{2}m\alpha(r)\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{mgk}{r}$. Préciser α(r) en fonction de k et r. Que peut-on dire de l'énergie mécanique.
g) On peut donc définir une énergie potentielle effective $E_{peff} = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{mgk}{r}$. Tracer l'allure de la courbe Epeff(r).

En fonction de la valeur de l'énergie mécanique initiale du système E_O, discuter le caractère lié ou libre du mouvement.

h) Pour quelle valeur de r a-t-on un mouvement circulaire ? On exprimera le rayon r_C du mouvement circulaire en fonction de C, g et k.

i) On lance la bille d'une distance r_O avec une vitesse $\vec{v}_0$. Préciser la direction et le module de $\vec{v}_0$ pour avoir un mouvement circulaire.

Réponse : $E_p = -\frac{mgk}{r}$; $\alpha(r) = 1 + \frac{k^2}{r^4}$; $r_C = \frac{C^2}{gk}$; $v_C = \sqrt{\frac{gk}{r_0}}$.

VI La comète 13P/Olbers

L'astronome allemand HEINRICH W. M. OLBERS (1758—1840) découvrit les astéroïdes Pallas et Vesta en 1802 et en 1807 ; en 1831, il réalisa la première observation de la comète qui porte son nom (13P/Olbers). Les caractéristiques orbitales de cette comète ont été déterminées initialement par C. F. GAUSS et F. BESSEL. Elle a été observée pour la dernière fois lors de son passage au périhélie (distance minimale au Soleil) le 10 janvier 1956. Certaines propriétés de cette comète sont examinées dans ce sujet.

Partie A. —Mouvements cométaires

On étudie dans cette partie le mouvement d'un corps ponctuel *M* de masse *m*, soumis à l'action d'un centre attracteur fixe à l'origine *O* des coordonnées d'un référentiel galiléen R. On posera $r = \|\overrightarrow{OM}\|$.

L'action de ce centre attracteur est décrite par une force unique $\vec{F} = -m\overrightarrow{grad}U(r)$, où U est une fonction supposée connue. On note aussi $\vec{v}$ la vitesse de *M* dans R, $\vec{L}_0 = m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}$, $L = \|\vec{L}_0\| > 0$ et C = L/m.

1 —Montrer que le mouvement de *M* est plan.

On choisira d'appeler (*Oxy*) ce plan, orienté par la convention $\vec{L}_0 = L\vec{e}_z$; l'étude du mouvement de *M* dans (*Oxy*) s'effectuera en coordonnées polaires (r, φ).

2 —On note E = mε l'énergie mécanique de *M*. Exprimer ε en fonction de r, C, $\dot{r}$ et U(r).

Le point *M* est en fait le centre d'une comète sphérique et homogène se déplaçant dans le champ de gravitation du Soleil (de masse M_S). Pour tout le reste de la partie A, on adopte l'expression U(r) = -K/r où *K* est une constante, et l'on se place dans le référentiel supposé galiléen dans lequel le Soleil est fixe, homogène et sphérique. De plus, on néglige l'influence des tous les autres corps du système solaire.

3 — Exprimer *K* en fonction de la constante de la gravitation universelle G et de la masse du Soleil M_S.

4— A quelle condition sur ε le mouvement de *M* vérifie-t-il $r_{min} \le r \le r_{max}$ avec $r_{min} \neq r_{max}$?

Les constantes r_{min} et r_{max} sont respectivement appelées périhélie et aphélie de la trajectoire.

On suppose désormais que la condition de la question 4 est vérifiée. L'origine des instants (*t* = 0) et des angles polaires (φ = 0) sera choisie de sorte que r(t = 0) = r_{min}, φ(t = 0) = 0.

5 — Exprimer ε et C en fonction de *K*, r_{min} et r_{max} puis en fonction de *K*, a = (r_{min} + r_{max})/2 et p = 2r_{min}.r_{max}/(r_{min} + r_{max}).

6 — Quelle est, sans démonstration, la nature de la trajectoire de *M* ? Indiquer en justifiant votre réponse, la signification physique des paramètres *a*, *p* et e = (r_{max} - r_{min})/(r_{max} + r_{min}) ? Représenter la trajectoire de *M* en précisant les points et dimensions remarquables.

7 — On étudie la partie de la trajectoire pour laquelle 0 < φ < π. Quel est alors le signe de $\dot{r}$?

Exprimer $\dot{r}$ en fonction de ε, *K*, *C* et *r*. Montrer que la durée τ de parcours de r_{min} à *r*(φ) le long de cette trajectoire s'écrit :

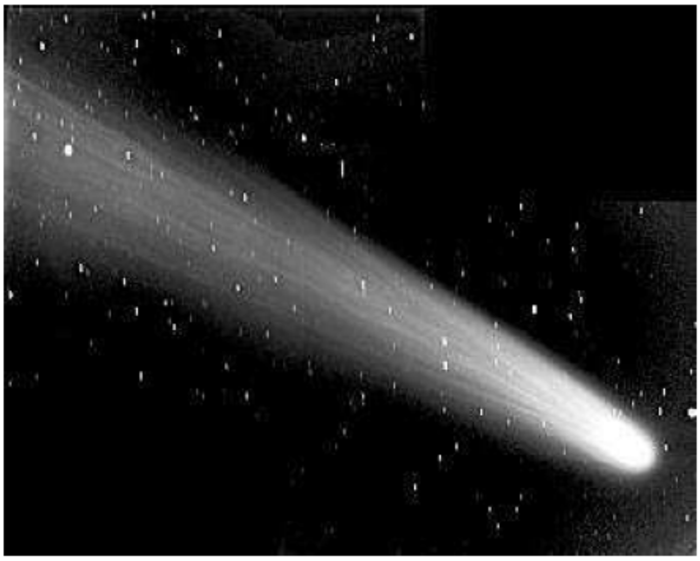
$$\tau = \sqrt{\frac{a}{K}}\int_{r_{min}}^{r(\varphi)} \frac{r}{\sqrt{a^2e^2 - (r-a)^2}}dr$$

8 — On effectue le changement de variable r = a(1-ecosχ). L'angle χ est appelé *anomalie excentrique*. Exprimer la durée τ du trajet du mobile *M* depuis l'instant initial jusqu'à sa position actuelle repérée par χ, en fonction de χ , *e*, *a* et *K* puis de χ , *e* et de la période *T* du mouvement de *M*.

Quel est le nom de la relation qui lie *T*, *K* et *a* ?

On considère que la trajectoire de la Terre autour du Soleil est circulaire, de rayon a_0 = 1 UA (unité astronomique) et de période T_0 =1 année = 365,25 jours. Les caractéristiques orbitales, assez stables, de la comète 13P/Olbers sont les suivantes : excentricité *e* = 0,930 ; distance au Soleil au périhélie r_{min} =1,18UA. On admettra que les relations t (χ) et *r*(χ) se généralisent à tout point de la trajectoire de cette comète.

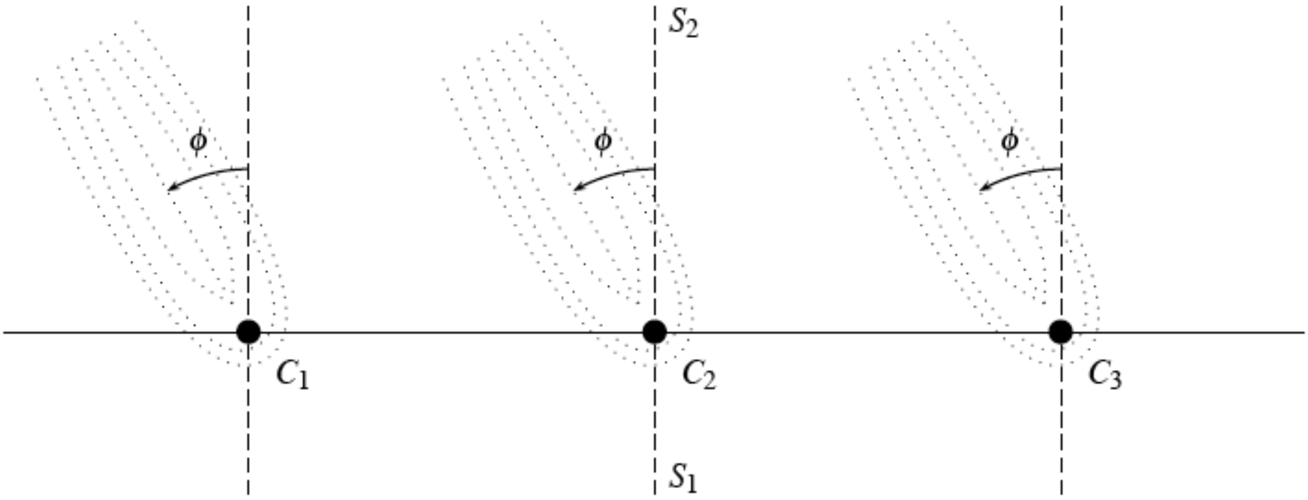
9 — A quelle date la comète reviendra-t-elle pour la prochaine fois au périhélie ? A quelle date la comète se trouvera-t-elle la prochaine fois à la distance *r* = 26,06 UA du Soleil ?



Comète Ikeya-Zhang photographiée en 2002 à l'observatoire de Haute-Provence.

Partie B. — La queue de la comète

En 1811, OLBERS proposa pour la première fois une théorie quantitative pour expliquer la formation de la queue des comètes, en imaginant que les particules qui la composent sont soumises à une force répulsive d'origine électrique variant comme le carré de l'inverse de la distance au Soleil. On connaît aujourd'hui le mécanisme de formation de la queue de la comète, en particulier si elle est formée de poussières solides.



Les poussières sont entraînées par un flux de particules (le vent solaire) émises par le Soleil et se déplaçant à une vitesse de l'ordre de 400 km.s^{-1}. On étudie pour simplifier (cf. ci-dessus) une comète se déplaçant en ligne droite à la vitesse de 30 km.s^{-1} ; la droite en traits pleins désigne la trajectoire de la comète, et les traits pointillés la direction du vent solaire.

10 — En justifiant votre réponse, indiquer si le Soleil est disposé du côté S_1 ou du côté S_2 sur la figure ci-dessus.

11 — En justifiant tout autant la réponse et sur cette même figure, la comète se déplace-t-elle dans le sens C1 -> C2 -> C3 ou dans le sens C3 -> C2 -> C1 ? Calculer l'angle ϕ entre la direction Soleil–comète et la direction moyenne de la queue de la comète.

Réponse : $\varepsilon = U + \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}\right)$; K = GMS ; ε < 0 ; ε = -K(rmax + rmin) = -K/2a ; $C = \sqrt{2K\frac{r_{min}r_{max}}{r_{min}+r_{max}}} = \sqrt{Kp}$; $\dot{r} = \sqrt{2\left(\varepsilon + \frac{K}{r}\right) - \frac{C^2}{r^2}} > 0$; $\tau = \sqrt{\frac{a^3}{K}}(\chi - e\sin\chi) = \frac{T}{2\pi}(\chi - e\sin\chi)$; 2025 ; 2041 ; S1 ; C1 -> C2 -> C3 ; $f \approx 4{,}3°$.

VII Lancement d'un satellite géostationnaire : ellipse de transfert

La Terre est à considérer comme un astre sphérique de centre O, de rayon R et de masse M. Le référentiel géocentrique est supposé galiléen. La Terre est animée par rapport à ce référentiel d'un mouvement de rotation uniforme de période T_1.

On désigne par g_0 l'intensité du champ de gravitation terrestre à la surface de la Terre.

On place un satellite (S) de masse m sur une orbite circulaire C_0 située dans le plan équatorial et d'altitude z faible devant R.

On considère que sur l'orbite C_0 le satellite est soumis au champ de pesanteur $\vec{g}_0$ identique à celui qui règne au niveau du sol.

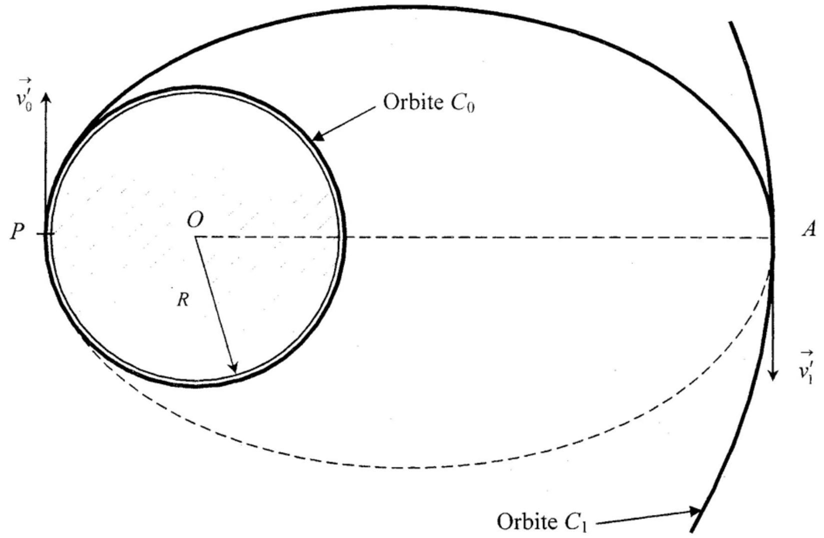
1) Déterminer la vitesse v_0 du satellite (S) en fonction de g_0 et R.

2) Exprimer la période T_0 du satellite (S) en fonction de g_0 et R.

3) Déterminer la vitesse v_E d'un point de l'équateur terrestre en fonction de R et T_1 ainsi que le rapport $(v_E/v_0)^2$.

4) Application numérique : Calculer le rapport $(v_E/v_0)^2$ pour R = 6400 km, $g_0 = 9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}}$ et T_1 = 24 h.

Dans la suite du problème, on négligera v_E^2 devant v_0^2.



On place maintenant le satellite (S) sur une nouvelle orbite C_1 située dans le plan équatorial. On désire que (S) soit vu immobile de tout point de la surface terrestre.
On ne considère plus que z est très petit devant R.

5) Exprimer le champ de pesanteur g en fonction de g_0.

6) Déterminer le rayon R_1 de cette nouvelle orbite C_1. En déduire le rapport $x = R_1/R$.

7) Déterminer la vitesse v_1 du satellite (S) sur l'orbite C_1 en fonction de x et v_0.

8) Exprimer en fonction de $K_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$ et de x, l'énergie E nécessaire pour amener le satellite (S) sur l'orbite C_1 depuis la surface terrestre.

La mise en orbite géostationnaire du satellite (S) est réalisée de la manière suivante :

<u>Phase 1</u> : On lance le satellite (S) depuis la surface terrestre sur l'orbite C_0. On désigne par W_1 l'énergie nécessaire à cette opération.

<u>Phase 2</u> : En un point P de C_0, on communique au satellite (S) en un temps très bref une nouvelle vitesse v'_0 de manière à le placer sur une orbite elliptique tangente à C_1 au point A. On désigne par v'_1 la vitesse du satellite (S) à son arrivée au point A.

<u>Phase 3</u> : Au point A, on fait passer la vitesse du satellite (S) de v'_1 à v_1.

9) Exprimer E_1 l'énergie nécessaire à la phase 1 en fonction de K_0.

10) Déduire de l'énergie sur C_0 et sur la trajectoire parabolique la vitesse v'_0 en fonction de v_0 et de x.

11) Exprimer l'énergie E_2 nécessaire à la phase 2 en fonction de K_0 et de x.

12) Déterminer la vitesse v'_1 en fonction de v_0 et de x.

13) Exprimer l'énergie E_3 nécessaire à la phase 3 en fonction de K_0 et de x. Comparer l'énergie E calculée à la question 8) et la somme $E_1 + E_2 + E_3$.

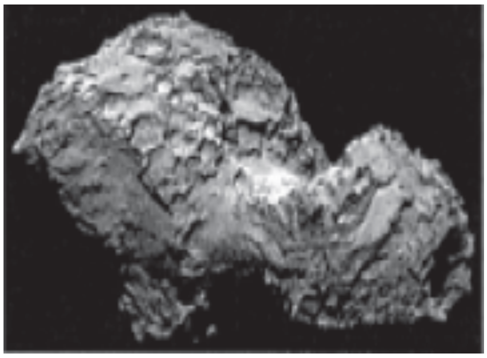
14) Déduire de la 3ème loi de Kepler la durée τ du transfert du satellite (S) de l'orbite C_0 à l'orbite C_1 en fonction de T_1 et de x.

Réponse : $v_0 = \sqrt{g_0 R}$; $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g_0}}$; $v_E = \frac{2\pi R}{T_1}$; $\left(\frac{v_E}{v_0}\right)^2 = \frac{4\pi^2 R}{T_1^2 g_0}$; $g = g_0\left(\frac{R}{R+z}\right)^2$; $R_1 = \left(\frac{GMT_1^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$; $x = \left(\frac{v_0}{v_E}\right)^{2/3}$; $v_1 = \frac{v_0}{\sqrt{x}}$;
$E = K_0\left(2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right)$; $E_1 = K_0\left(1 - \frac{1}{x^3}\right)$; $v'_0 = v_0\sqrt{\frac{2x}{1+x}}$; $E_2 = K_0\frac{x-1}{x+1}$; $v'_1 = v_0\sqrt{\frac{2}{x(1+x)}}$; $E_3 = K_0\frac{x-1}{x(x+1)}$;
$E = E_1 + E_2 + E_3$; $\tau = \frac{T_1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{3/2}$.

VIII Rosetta et Philae.

Rosetta est une mission de l'agence spatiale européenne (ESA) qui a pour but d'étudier la comète Tchourioumov-Guérassimenko (67P/TG) et sur son comportement à l'approche du Soleil.

La sonde a été lancée le 2 Mars 2004 par une fusée Ariane 5. Après un voyage de près de 10 ans pendant lequel elle aura parcouru près de 6,5 milliards de km, Rosetta a atteint la comète en août 2014. La sonde est constituée d'un satellite principal et d'un atterrisseur (Philae).
La sonde spatiale a été placée en orbite autour de la comète puis, après une première phase d'observation d'environ 18 mois, Rosetta a envoyé le 12 Novembre 2014 un petit atterrisseur, Philae, se poser sur sa surface pour analyser la composition de son sol et sa structure.



L'objet de cette épreuve est d'aborder quelques questions relatives à la mission Rosetta. On désigne dans l'énoncé par v le module du vecteur $\vec{v}$.

Les données numériques utiles sont fournies à la fin du problème. On notera G la constante universelle de gravitation.

X-1 A propos de la sonde Rosetta

1) Questions préliminaires

a) Donner l'expression de la force de gravitation $\vec{F}$ que le Soleil, de masse M_S exerce sur un objet de masse m situé à une distance r de son centre ($r > R_S$ où R_S est le rayon du Soleil). Préciser les notations employées et tracer un schéma.

b) Montrer que cette force est conservative et donner l'expression de l'énergie potentielle associée.

c) Montrer que le mouvement d'un astre en orbite autour du Soleil est plan.

d) On suppose que le mouvement de la Terre autour du Soleil est circulaire. Montrer que le mouvement est uniforme et retrouver l'expression (et la valeur) de la vitesse de la Terre.

2) Budget énergétique pour transfert orbital

Une façon simple d'envoyer un engin spatial d'une orbite circulaire à une autre (coplanaire) est de lui faire parcourir une orbite temporaire de transfert elliptique. Cette trajectoire est tangente aux orbites de départ et d'arrivée. Elle est appelée orbite de transfert de Hohmann.

Deux impulsions sont nécessaires pour effectuer ce transfert. Une première impulsion engendre une variation de vitesse Δv_1 (voir figure 1) ce qui permet le passage de l'orbite circulaire de départ vers l'orbite elliptique de transfert. Une seconde impulsion, associée à une variation de vitesse Δv_2, permet le passage de l'orbite de transfert vers l'orbite d'arrivée.

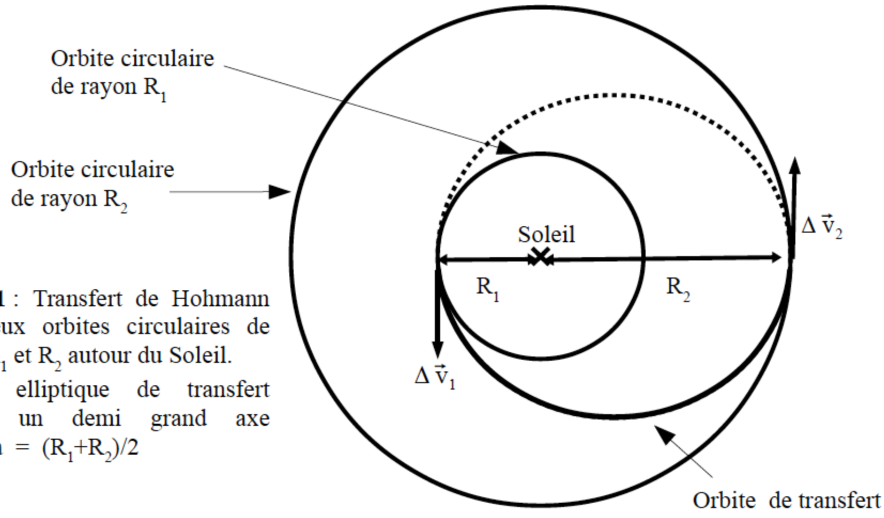


Figure 1 : Transfert de Hohmann entre deux orbites circulaires de rayons R_1 et R_2 autour du Soleil. L'orbite elliptique de transfert possède un demi grand axe $a = (R_1+R_2)/2$

On indique que l'énergie mécanique d'un objet de masse m en orbite elliptique autour d'un corps de masse M est donné par : $E_m = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{a}$ où a est le demi grand axe de l'ellipse.

a) Montrer que l'expression du paramètre Δv_1 permettant de passer d'une orbite circulaire de rayon R1 à une orbite elliptique de demi grand axe a = (R1+R2)/2 est : $\Delta v_1 = \sqrt{\frac{GM_S}{R_1}}\left(\sqrt{\frac{2R_2}{R_1+R_2}} - 1\right)$.

Le lanceur Ariane 5G+ utilisé pour la mission place dans un premier temps Rosetta sur une orbite héliocentrique de même rayon que celle de la Terre. La comète 67P/TG possède une trajectoire elliptique autour du Soleil dont le demi grand axe est de 3,5 ua. On supposera que la Terre possède une orbite quasi circulaire.

On souhaite évaluer la valeur de Δv permettant de rejoindre la comète.

b) Le périhélie de la comète, c'est à dire le point de la trajectoire le plus proche du soleil est de l'ordre de 1 ua. On envisage une injection directe dans l'orbite de la comète depuis l'orbite circulaire de la Terre. Déterminer la valeur Δv nécessaire à cette manœuvre.
Cette grandeur (appelée aussi budget Δv) permet de déterminer la masse de carburant nécessaire aux différentes manœuvres. En pratique, lorsque plusieurs manœuvres sont nécessaires, chacune associée à une valeur Δv_i, le budget Δv correspond alors à la somme de ces dernières.

On prendra pour la suite du problème une valeur de Δv pour rejoindre la comète 67P/TG de 9,2 km.s^{-1}.

3) Lien entre budget Δv et carburant

La propulsion de Rosetta est assurée par 24 petits moteurs-fusées à ergols liquides. Les moteurs permettent d'effectuer les corrections orbitales au cours du long périple de la sonde afin de placer celle-ci en orbite autour de la comète. Nous cherchons à estimer la masse d'ergols nécessaire à la réalisation de la mission.

a) L'éjection de gaz par les tuyères des propulseurs permet de modifier la vitesse de la sonde. On considère un mouvement rectiligne de la sonde. L'équation du mouvement, ***que l'on ne demande pas de retrouver***, s'écrit alors $m\frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{dt}v_e$ où m est la masse de la sonde à l'instant t, v la vitesse de la sonde et v_e la vitesse d'éjection des gaz.
En considérant que la vitesse d'éjection est constante, montrer que $\Delta v = v_e Ln\left(\frac{m+\Delta m}{m}\right)$ où Δm est la masse de carburant utilisée pour produire une variation de vitesse Δv.
Cette relation est appelée équation de Tsiolkovski. Elle relie l'accroissement de vitesse au cours d'une phase de propulsion d'un objet (sonde, fusée ...) doté d'un moteur à réaction au rapport de sa masse initiale à sa masse finale.

b) La quantité de carburant nécessaire à une mission est souvent quantifiée par le paramètre r défini comme : $r = \frac{masse\ de\ carburant}{masse\ du\ véhicule\ à\ vide}$.Déterminer la relation entre r et Δv.

c) À partir des résultats obtenus précédemment, on a tracé (voir la figure 2 ci-contre) l'évolution de la valeur du coefficient r en fonction de Δv, pour une valeur fixée de la vitesse d'éjection $v_e = 3{,}5$ km.s^{-1}.

Indiquer de façon argumentée, en vous aidant des données fournies, si une trajectoire de Rosetta associée à une injection directe sur l'orbite de la comète 67P/TG est envisageable.

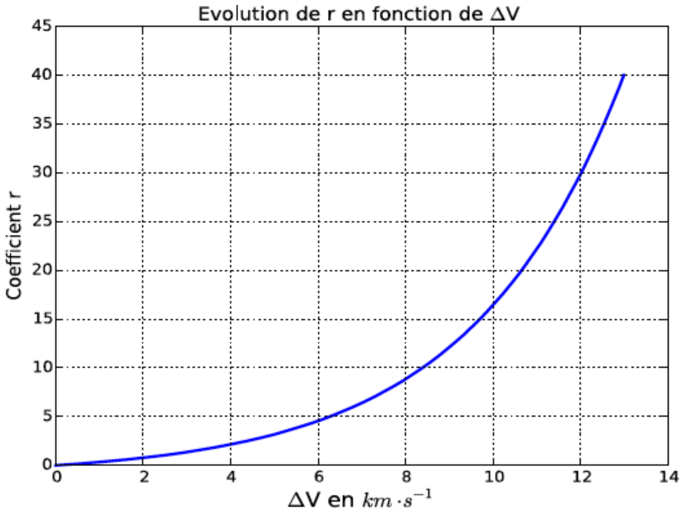


figure 2

X-2 Atterrissage du module Philae

Dans cette partie, la comète est modélisée par une boule homogène de masse m_{com} et de masse volumique μ_{com}.
La distance entre un point M et le centre O de la comète est notée r = OM.

a) Déterminer le rayon r_{com} de la boule équivalente à la comète.

Le champ gravitationnel $\vec{g}_{com}$ dû à la comète, s'écrit $\vec{g}_{com} = -G\frac{m_{com}}{r^2}\vec{e}_r$ (pour $r > r_{com}$) où $\vec{e}_r$ est le vecteur unitaire radial centrifuge.

b) Peut-on considérer le champ gravitationnel de la comète uniforme lors de la chute du module Philae suite à son largage ?

<u>Approche numérique de l'équation du mouvement</u>

On étudie la chute libre de l'atterrisseur Philae, dans un référentiel dont l'origine est le centre O de la comète et qui tourne avec Rosetta, de sorte que le vecteur $\vec{e}_r$ pointe constamment vers l'atterrisseur (accélération $\vec{a} = \ddot{r}\vec{e}_r$). On admet que ce référentiel peut être considéré comme galiléen.

c) Établir l'équation du mouvement de l'atterrisseur Philae, une fois séparé de Rosetta, en projection sur l'axe radial.

Cette équation peut être résolue numériquement. L'évolution temporelle de la distance r est représentée sur la figure 1, à partir de la distance initiale r(t = 0) = r_{larg}, pour différentes vitesses verticales initiales $v_0 = \dot{r}(t = 0)$.

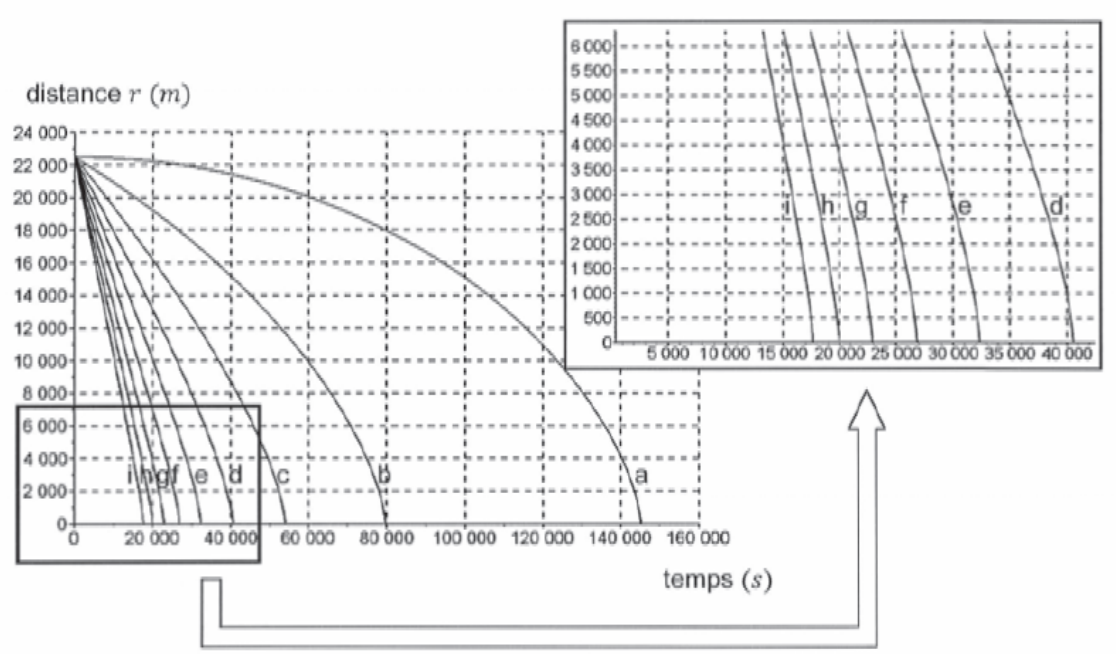


Figure 1 - Evolution temporelle de l'altitude pour différentes vitesses initiales :
a : $v_0 = 0\ m \cdot s^{-1}$ b : $v_0 = -0{,}15\ m \cdot s^{-1}$ c : $v_0 = -0{,}30\ m \cdot s^{-1}$
d : $v_0 = -0{,}45\ m \cdot s^{-1}$ e : $v_0 = -0{,}60\ m \cdot s^{-1}$ f : $v_0 = -0{,}75\ m \cdot s^{-1}$
g : $v_0 = -0{,}90\ m \cdot s^{-1}$ h : $v_0 = -1{,}05\ m \cdot s^{-1}$ i : $v_0 = -1{,}20\ m \cdot s^{-1}$

d) Déterminer la durée τ0 de la chute de Philae s'il est abandonné par Rosetta avec une vitesse verticale nulle.

e) La durée réelle de chute est $\tau \approx 7h$. En déduire la vitesse verticale initiale communiquée à l'atterrisseur.

Différentes trajectoires de phase sont représentées sur la figure 2, en fonction de la vitesse verticale initiale.

f) Déterminer, par lecture graphique, la vitesse verticale atteinte par Philae au moment du contact avec la comète.

Approche énergétique

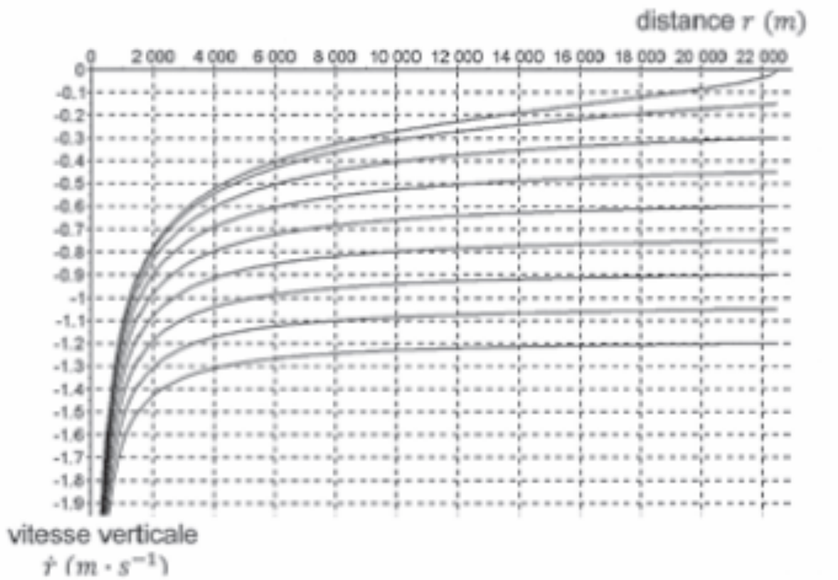


Figure 2 - Trajectoires de phase pour différentes vitesses initiales

L'objectif est de retrouver la vitesse atteinte par l'atterrisseur au moment du contact avec la comète.

g) Donner sans démonstration l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle E_{pcom} d'un point matériel de masse m situé à la distance $r > r_{com}$ du centre de la comète, en fonction de G, m, m_{com} et r (on fixe $E_{pcom}(r \to \infty) = 0$).

h) Lors de la chute de Philae, préciser comment évolue l'énergie mécanique de l'atterrisseur.

i) En déduire, littéralement puis numériquement, la vitesse atteinte par l'atterrisseur lors du contact avec la comète.

Données numériques :

- **Grandeurs physiques :**
  Masse du Soleil : $M_S = 2{,}0.10^{30}$ kg
  Masse de la Terre : $M_T = 6{,}0.10^{24}$ kg
  Rayon moyen de l'orbite de la Terre autour du Soleil : 1 unité astronomique (ua) = 150.10^{6} km
  Rayon de la Terre : $R_T = 6{,}4.10^{3}$ km
  Constante de gravitation universelle : $G = 6{,}67.10^{-11}$ $m^3.kg^{-1}.s^{-2}$

- **Données techniques relatives à Rosetta :**
  Masse à vide de Rosetta : 1 300 kg
  Charge utile du lanceur Ariane 5G+ : 6 950 kg
  Masse de l'atterrisseur Philae : $m_{ph} = 98$ kg
  Distance de largage par rapport au centre : $r_{larg} = 22{,}5$ km

- **Caractéristiques de la comète Tchourioumov-Guérassimenko :**
  Masse de la comète : $m_{com} = 1{,}0.10^{13}$ kg
  Masse volumique de la comète : $\mu_{com} = 400$ kg.m^{-3}
  Période de rotation propre de la comète : $T_{com} = 12{,}4$ h
  Distance du Soleil au moment du rendez-vous avec Rosetta : 3,3 ua
  Diamètre du noyau : 4 km
  Albédo du noyau (fraction du rayonnement solaire incident réfléchie par le noyau) : 4%

Réponse : $v = \sqrt{\frac{GM_S}{r}} = 30 km.s^{-1}$; $r = e^{\Delta v/v_e} - 1$; $r_{com} = 1{,}8$ km ; $\ddot{r} + \frac{Gm_{com}}{r^2} = 0$; $\tau = 145000$ s ; $v_0 = -0{,}75$ m.s^{-1} ; $v = -1{,}1$ m.s^{-1}.

IX NASA's Mars Exploration Program

Un demi-siècle après avoir marché sur la Lune, l'exploration spatiale semble se fixer à moyen terme l'objectif de l'exploration de la planète Mars par l'Homme. Une telle expédition suppose de résoudre un très grand nombre de problèmes concernant les aspects techniques que les aspects humains.

Ce sujet propose d'étudier la cohérence de l'un des nombreux scénarios élaborés par la NASA pour un vol habité vers Mars.

Seule la partie I est proposée. La partie II étudie le système de propulsion, mais sort du cadre du programme de première année.

Certaines questions, repérées par une barre en marge, ne sont pas ou peu guidées. Elles nécessitent plus de temps pour élaborer un modèle ou un raisonnement, le barème en tient compte.

Ce sujet est accompagné d'un document réponse à rendre avec la copie (même s'il n'a pas été utilisé). Les principales données numériques sont regroupées en fin de sujet.

I Le voyage entre la Terre et Mars.

Dans toute cette partie du problème, les orbites des planètes autour du Soleil sont assimilées à des cercles de rayon égal au demi-grand axe a des ellipses. On se place dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen.

I.A – Vitesse de la Terre et de Mars dans le référentiel héliocentrique.

Q 1. Donner les dimensions de la constante gravitationnelle G ainsi que son unité dans le système international.

Q 2. Montrer que le moment cinétique $\overrightarrow{L_o}$ en O, centre du Soleil, d'un objet de masse m est une constante du mouvement.

Q 3. On utilise les coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'origine O et de base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ avec l'unitaire $\overrightarrow{e_z}$ tel que $\overrightarrow{L_o} = L_o\overrightarrow{e_z}$. Justifier que le mouvement est plan et exprimer $C = r^2 \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ en fonction de L_O et m. Quel est le nom de cette grandeur ?

Q 4. Déterminer, dans le cas d'une orbite circulaire de rayon R, la vitesse V de l'objet en fonction de G, M_S, R et de la masse de l'objet m. Calculer les valeurs numériques de V_T, la vitesse orbitale de la Terre et de V_M, celle de Mars, dans le référentiel héliocentrique.

I.B – Aspect énergétique et troisième loi de Kepler.

Q 5. Déduire l'expression de l'énergie cinétique, puis de l'énergie mécanique de l'objet de masse m sur son orbite circulaire autour du Soleil en fonction de G, M_S, R et m.

Q 6. Exprimer la période de rotation T de l'objet en fonction G, M_S et R (troisième loi de Kepler).

Il est rappelé que les expressions de l'énergie mécanique et de la troisième loi de Kepler obtenues pour un mouvement circulaire peuvent être généralisées au cas d'une orbite elliptique en remplaçant le rayon r par le demi-grand axe de la trajectoire.

I.C – Voyage aller Terre – Mars, orbite de transfert.

D'un point de vue énergétique, la méthode la plus efficace pour envoyer un vaisseau d'une orbite circulaire à une autre orbite circulaire coplanaire est de le placer sur une trajectoire de transfert elliptique tangente aux deux orbites circulaires, donc ici aux orbites de Mars et de la Terre (ellipse de Hohmann). On admet que seule l'attraction solaire agit sur le vaisseau pendant son mouvement.

Q 7. Représenter, sur la figure A du document réponse, montrant les orbites de la Terre et de Mars, l'allure de l'orbite de transfert (trajectoire de Hohmann). La position de la Terre au temps t = 0 du départ du vaisseau est prise comme origine angulaire ($\theta_T(t = 0) = 0$).

Q 8. Au départ de l'orbite de la Terre, exprimer en fonction de V_T, a_M et a_T la vitesse V'_T que doit avoir le vaisseau sur sa trajectoire de transfert. En déduire la variation de vitesse $\Delta V_T = V'_T - V_T$. Calculer la valeur numérique de ΔV_T.

En pratique, la variation de vitesse requise est plus importante en raison de la nécessité de se libérer de l'attraction de la planète à partir d'une orbite basse.

Q 9. Exprimer puis calculer la durée Δt du voyage jusqu'à l'orbite de Mars.

Q 10. Quel doit être l'angle $\alpha_0 = \theta_M(t = 0) - \theta(t = 0)$ (Terre - Soleil - Mars) formé par les directions de Mars et de la Terre, vus du Soleil, au moment du lancement afin que Mars soit au rendez-vous à l'arrivée du vaisseau ? Calculer la valeur numérique de α_0 et indiquer la position de Mars au moment du lancement sur la figure A du document réponse.

Q 11. Dans l'hypothèse d'un problème survenu pendant le voyage aller nécessitant de ne pas explorer la planète, le vaisseau ne modifie pas sa vitesse lors du passage de l'orbite de Mars. Déterminer la position angulaire de la Terre au bout d'une révolution complète de celui-ci sur son orbite de transfert. Commenter.

I.D – Durée de la mission

Toujours pour minimiser le cout énergétique, le voyage retour emprunte le même type d'orbite de transfert qu'à l'aller.

Q 12. Déterminer l'angle α_1 (Terre - Soleil - Mars) au moment du départ de Mars.

Q 13. En déduire le nombre de jours que les astronautes vont pouvoir passer sur la planète rouge, la durée totale de la mission (en jours) et la période entre deux fenêtres de lancement depuis la Terre.
NB : Les questions suivantes (Q14 à Q 21) sont indépendantes de la question Q13.

Moyennant une plus grande dépense énergétique, il est possible de modifier ce scénario de mission, et ce en fonction des objectifs voulus (réduction du temps de trajet aller ou retour, modification du temps global de mission en sont des exemples). Ainsi, une variation de vitesse $\Delta\overrightarrow{V_T}$ colinéaire à $\overrightarrow{V_T}$ plus importante au départ permet de réduire le temps du voyage aller.

Dans la suite, on cherche une réduction de 25 % de l'angle balayé par le vaisseau pour atteindre l'orbite de Mars autour du Soleil. On se place de nouveau avec la position de la Terre au lancement prise comme origine angulaire ($\theta_T(t = 0) = 0$) et l'on souhaite que le vaisseau atteigne Mars à un instant $\Delta t'$ tel que $\theta_M(\Delta t') = 3\pi/4$.

On admet que la nouvelle trajectoire du vaisseau est une conique dont l'un des foyers est le Soleil et d'équation polaire $r(\theta) = p/(1 + e \cos\theta)$ où p est appelé paramètre de la conique et e son excentricité.

Q 14. Placer sur la figure B du document réponse la position de Mars à l'arrivée du vaisseau.

Q 15. Justifier que r_P, le périhélie de la trajectoire du vaisseau (distance minimale du Soleil au vaisseau), vérifie : $r_P = a_T$.

Q 16. Montrer que l'excentricité s'écrit $e = \frac{a_M - a_T}{\frac{1}{\sqrt{2}}a_M + a_T}$ et calculer sa valeur numérique.
Tracer sur la figure B l'allure de la trajectoire.

Q 17. Exprimer l'énergie mécanique E_M du vaisseau sur cette trajectoire en fonction de m, V_T et e.

Q 18. En déduire la vitesse V''_T que doit avoir le vaisseau au départ pour se placer sur sa nouvelle orbite, toujours en fonction de V_T et e.

Q 19. Donner, en fonction de V_T et e, la variation de vitesse $\Delta V'_T = V''_T - V_T$ qu'il faut communiquer au vaisseau pour le mettre sur sa nouvelle trajectoire de transfert.
Calculer la valeur numérique de $\Delta V'_T$.

Q 20. Exprimer $C = r^2\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ en fonction de a_T et V''_T.

Q 21. Évaluer le temps $\Delta t'$ du transfert entre la Terre et Mars.
On donne : $\int_0^{\theta_M(\Delta t')} \frac{1}{(1+e\cos\theta)^2} d\theta = 2{,}15$, avec l'excentricité calculée en question 16.

Indication : la relation $C = r^2.\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ peut s'écrire sous la forme $\mathrm{d}t = (r^2/C).\mathrm{d}\theta$.

Données

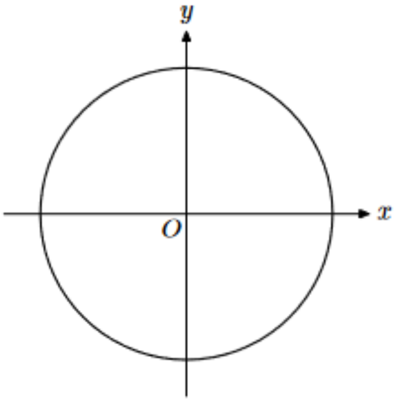
Masse du Soleil	$M_S = 2{,}00 .10^{30}$ kg
Demi-grand axe de l'orbite de la Terre	$a_T = 150.10^6$ km
Demi-grand axe de l'orbite de Mars	$a_M = 228.10^6$ km
Constante gravitationnelle	$G = 6{,}67.10^{-11}$ SI
Champ de pesanteur terrestre	$g = 9{,}81$ m.s^{-2}
Période de révolution de la Terre	$T_T = 365$ jours terrestres
Période de révolution de Mars	$T_M = 687$ jours terrestres

Formulaire

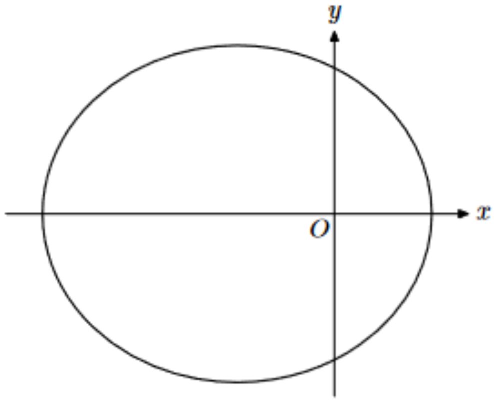
L'équation polaire d'une conique d'axe focal (Ox), de paramètre p et d'excentricité e s'écrit

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

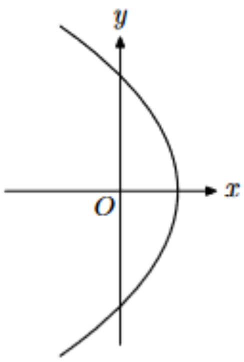
La nature de la courbe dépend de l'excentricité. On distingue 4 cas.



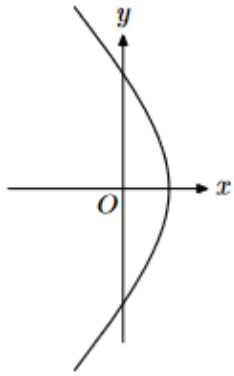
$e = 0$, la courbe est un cercle



$0 < e < 1$, la courbe est une ellipse



$e = 1$, la courbe est une parabole



$e > 1$, la courbe est une hyperbole

Document réponse A RENDRE AVEC LA COPIE. *NOM : …………………..* *Prénom : ………………………..*

Questions 7 et 10

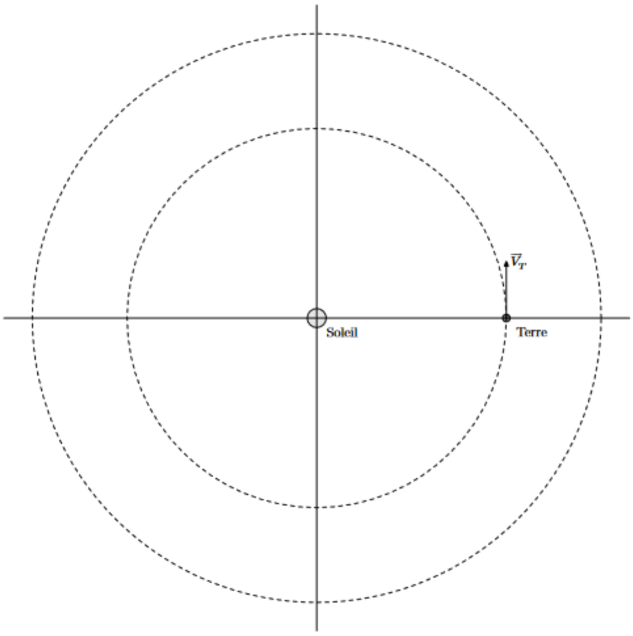


Figure A

Questions 14 et 16

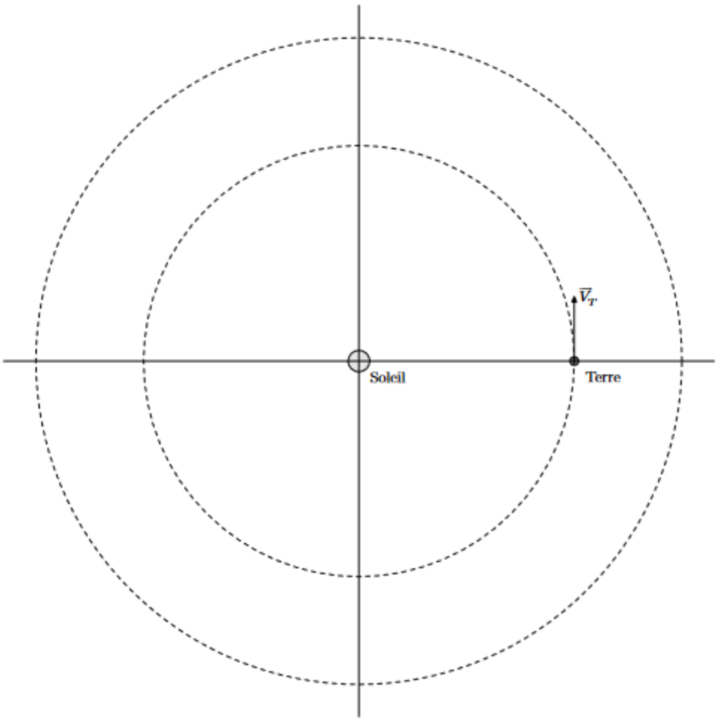


Figure B

Réponse : $V_T = \sqrt{\frac{GM_S}{R_T}} = 2{,}98.\,10^4 m.s^{-1}$ et $V_M = \sqrt{\frac{GM_S}{R_M}} = 2{,}42.\,10^4 m.s^{-1}$, $E_c = -G\frac{M_S m}{2R}$; $T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM_S}}$;
$\Delta V_T = V_T\left(\sqrt{\frac{2a_M}{a_T+a_M}} - 1\right) = 2{,}93.\,10^3 m.s^{-1}$; $\Delta t = \frac{T}{2} = 259 jours$; $\alpha_0 = \pi - \frac{V_M \Delta t}{a_M} = 44{,}4°$; $\theta_T(T) = 151°$; $\alpha_1 = \frac{2\pi\Delta t}{T_T} - \pi = 75°$;
$\Delta t_{Mars} = 453 jours$; $\Delta t_{totale} = 970 jours$; $\Delta t_{attente} = 779 jours$; e = 0,251 ; $E_M = -\frac{mV_T^2(1-e)}{2}$;
$V''_T = V_T\sqrt{1+e} = 3{,}34.\,10^4 m.s^{-1}$; $\Delta V'_T = 3{,}53.\,10^3 m.s^{-1}$; $\Delta t' = 2{,}15.\frac{a_T(1+e)^2}{V''_T} = 175 jours.$